最適化数学 第 13 回

[今回の項目]

1. 変分問題：最適性条件の証明
2. 制約つき変分問題
3. 最適性条件

復習：固定端変分問題

［定理］(一般の汎関数に対する最適性必要条件)

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & F(y) := \displaystyle\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \\
\text{制　約} & y(a) = A,\ y(b) = B
\end{array}
$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $\bar{y}(x)$ は，以下を満たす：

$$
(*) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[\bar{y}(x)] = f_y[\bar{y}(x)] \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B. \end{cases}
$$

（汎関数が凸とは限らない一般の場合．凸の場合はすでに示した.）

例

$$\text{最小化 } F(y) = \int_0^1 \{y(x) + y'(x)^2\}\, dx$$
$$y(0) = 1,\ y(1) = 2$$

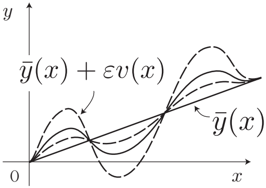
$$\begin{aligned} &f(x, y, z) = y + z^2 \\ &f_y(x, y, z) = 1,\ f_z(x, y, z) = 2z \\ &f_y[y(x)] = 1,\ f_z[y(x)] = 2y'(x) \end{aligned}$$

より，オイラー・ラグランジュ方程式は,

$$\frac{d}{dx}\{2y'(x)\} = 1$$

となる．よって，$y''(x) = 1/2$ より，$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + C_1 x + C_2$．端点条件より，$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$ である．

証明の概要：固定端変分問題



$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．すると，

（制約 $y(a)=A$, $y(b)=B$ を満たし $\bar{y}(x)$ に十分近いすべての $y(x)$）

が成り立つ．

ここで，$v(x)$ を $v(a)=0$, $v(b)=0$ を満たす任意の関数とする．それに対して，ε を十分小さい数とすれば

は，制約を満たし $\bar{y}(x)$ に近い関数である．よって，局所最小値の定義より，

$$\geq F(\bar{y}) \quad （十分小さい\ \varepsilon\ ）$$

が成り立つ．

証明の概要：続き

ここで $\phi(\varepsilon) = F(\bar{y} + \varepsilon v)$ とおくと（単なる書き換え）

$$\boxed{} \geq \boxed{} \qquad (\text{十分小さい } \varepsilon)$$

が成り立つ．いま，$\phi(\varepsilon)$ は 1 変数関数なので，$\varepsilon = 0$ が局所最小解であることから $\phi'(0) = \boxed{}$ が成り立つ．方向微分の定義より，

$$\boxed{\phantom{\phi'(0) = DF(\bar{y})(v) = 0 \quad\quad}}$$

を得る．さらに方向微分の第 2 公式と $v(a) = v(b) = 0$ より

$$0 = DF(\bar{y})(v) = \boxed{}$$

$$= \int_a^b \boxed{} dx$$

を得る．

証明の概要：続き

よって

$$\int_a^b \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dx = 0$$

（ $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ を満たすすべての $v(x)$ ）

が成り立ち，これより，

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ （すべての x で 0 となる関数）

を得る（オイラー–ラグランジュ方程式）.

制約つき変分問題

固定端変分問題は，制約が簡単であったが，以下のようにより難しい制約を持つ変分問題も多い．

Example

例で挙げた懸垂線問題は

$$\begin{aligned} &\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_a^b mgy(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\ &\textbf{制　約} \quad G(y) := \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell \\ &\qquad\qquad y(a) = h, \quad y(b) = h \end{aligned}$$

となる．

制約には端点制約の他に積分で表される制約も含まれている．

制約つき変分問題の一般形

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\
&\text{制　約} \quad G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell \\
&\qquad\qquad\quad y(a) = A,\ y(b) = B
\end{aligned}
$$

この問題では，関数 $\bar{y}(x)$ が

$\boxed{}$ $y(a) = A,\ y(b) = B$

を満たし，$\bar{y}(x)$ に近いすべての関数 $y(x)$ に対して

$\boxed{}$

となる $\bar{y}(x)$ が局所最小解である．

制約つき変分問題に対する実験的考察 その一

制約つき変分問題に対して，そのままではオイラー–ラグランジュ方程式は使えない．
まず，以下の積分制約から考える．

$$
\begin{aligned}
&\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
&\textbf{制　約} \quad \int_0^1 y(x)\,dx = 1, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

この問題の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とおく．すると

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

($\boxed{\qquad\qquad}$, $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ を満たし $\bar{y}(x)$ に近い $y(x)$)

が成り立つ．

考察その一の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると,

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

($\boxed{}$, $v(0) = v(1) = 0$ を満たすすべての関数 v)

いま, $\bar{y}(x)$ は制約を満たすので, 関数 $v(x)$ に対して

$$\int_0^1 \{\bar{y}(x) + \varepsilon v(x)\}\, dx = 1 \iff \int_0^1 v(x)\, dx = \boxed{}$$

となる. よって, 以下が成り立つ.

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

($\boxed{}$, $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$)

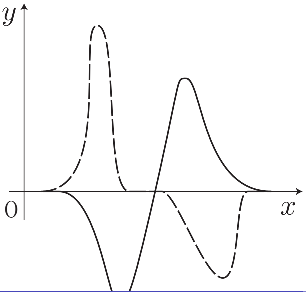
考察その一の続き

したがって，固定端問題の証明と同様に，方向微分が 0 であることと，第 2 公式を用いると，

$$\int_0^1 \left[f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\{f_z[\bar{y}(x)]\} \right] v(x)\,dx = 0$$

（ $\int_0^1 v(x)\,dx = 0$, $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ を満たすすべての $v(x)$ ）

を得る．固定端問題の場合の証明内の式とそっくりだが，$v(x)$ に積分制約が加わっている．



積分値が 0 になる関数 $v(x)$ に対して，常に $\int_0^1 h(x)v(x)\,dx = 0$ となる $h(x)$ は？

$\Downarrow$

制約つき変分問題に対する実験的考察 その二

次に少し複雑な積分制約について考える.

$$
\begin{aligned}
&\textbf{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 f[y(x)]\,dx \\
&\textbf{制　約} \quad G(y) := \int_0^1 \left\{20y(x) + e^{2x}y'(x)\right\}\,dx = 1 \\
&\qquad\qquad\quad y(0) = 0,\ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

の局所最小解を $\bar{y}(x)$ とする．すると,

$$F(y) \geq F(\bar{y})$$

$(\boxed{},\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$ を満たすすべての関数$)$

が成り立つ.

考察その二の続き

$v(x)$ を $v(0) = v(1) = 0$ を満たす任意の関数とすると,

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

($\boxed{}$, $v(0) = 0,\ v(1) = 0$ を満たすすべての関数 v)

いま,$G(\bar{y} + v) = \displaystyle\int_0^1 \left[20\left\{\bar{y}(x) + v(x)\right\} + e^{2x}\left\{\bar{y}'(x) + v'(x)\right\}\right] dx = 1$

$$\iff \boxed{} = 0$$

$$\iff \int_0^1 \left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0 \text{ (部分積分)}$$

より,

$F(\bar{y} + \varepsilon v) \geq F(\bar{y})$

($\boxed{}$, $v(0) = 0,\ v(1) = 0$

を満たすすべての関数 v)

考察その二の続き

したがって，

$$\int_0^1 \boxed{}\, dx = 0$$

$$\left(\int_0^1 \boxed{}\, dx = 0,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0\right.$$

を満たすすべての関数 v）

が成り立つ．ここで，

$$\int_0^1 \boxed{}\,\boxed{}\left(20 - 2e^{2x}\right) v(x)\, dx = 0$$

より，

$$\boxed{}$$

を得る．いま

$$f_y[\bar{y}(x)] - \frac{d}{dx}\left\{f_z[\bar{y}(x)]\right\} = \boxed{}$$

になるという関係に注意しておこう．

一般の制約の場合

先程の考察を一般化すると，制約式が

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx$$

のとき，局所最小解 $\bar{y}(x)$ に対するオイラー–ラグランジュ方程式の両辺の差は，ある実数 λ に対して

$$\boxed{} = \lambda \cdot \boxed{}$$

となることが示せる．$\frac{d}{dx}$ のある項を左辺に，$\frac{d}{dx}$ のない項を右辺に移項し，λ を $-\lambda$ に置き換えると

$$\boxed{}$$

となる．

制約つき変分問題の最適性条件

［定理］

$$\text{最小化} \quad F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$\text{制　約} \quad G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx = \ell$$

$$y(a) = A,\ y(b) = B$$

に対して，$\bar{y}(x)$ を局所最小解とする．このとき $DG(\bar{y})(\cdot)$ が正則ならば，ある実数 λ が存在して，$\boxed{}$ に対して，$\bar{y}(x)$ は

$$(*) \quad \begin{cases} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \bar{y}(a) = A,\ \bar{y}(b) = B \end{cases}$$

を満たす．

制約つき変分問題の停留関数

Definition

定理で用いた

$$\tilde{f}(x,y,z) = \boxed{}$$

を **ラグランジュ関数** と呼ぶ.

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \\ \int_a^b g[y(x)]\,dx = \ell \\ y(a) = A,\ y(b) = B \end{cases}$$

を満たす関数 $y(x)$ を，問題 (2) における **停留関数** と呼ぶ．また，$(*)$ の微分方程式

$$\boxed{}$$

も，単に **オイラー–ラグランジュ方程式** と呼ぶ.

解法例

Example

制約付き変分問題

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & F(y) := \int_0^1 y'(x)^2 \, dx \\
\text{制　約} \quad & G(y) := \int_0^1 y(x) \, dx = 1 \\
& y(0) = 0, \ y(1) = 1
\end{aligned}
$$

停留関数を求めよ.

板書

練習問題

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \text{最小化} \quad F(y) := \int_0^\pi \{2y(x)\sin x + y'(x)^2\}dx \\
& \text{制　約} \quad G(y) := \int_0^\pi y(x)dx = 1 \\
&\phantom{(1) \quad \text{制　約} \quad} y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \\
&(2) \quad \text{最小化} \quad F(y) := \int_0^1 \{4y(x) + y'(x)^2\}\, dx \\
& \text{制　約} \quad G(y) := \int_0^1 xy(x)\, dx = \frac{1}{4} \\
&\phantom{(2) \quad \text{制　約} \quad} y(0) = 0,\ y(1) = -1
\end{aligned}
$$