最適化数学 第 14 回

［今回の項目］

1. 有名な変分問題の解

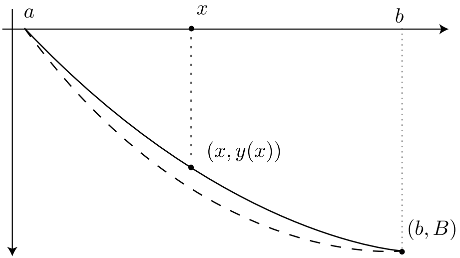
最速降下線

関数 $y(x)$ のグラフで滑り台の形を表す．重力による加速度を g とおくと，高さ y のときの速度 v は，エネルギー保存則より $mv^2/2 = mgy$ を満たすので $v = \sqrt{2gy}$ となる．

よって，移動時間は

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

となる．この積分値を最小にする関数 $y(x)$ のグラフが最速滑り台の形を表す．



解法

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad F(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} dx \\
&\text{制　約} \quad y(0) = 0, y(a) = A
\end{aligned}
$$

の停留関数を求める．まず，目的汎関数の被積分関数は

$$
f(x, y, z) = \boxed{}
$$

である．ここで，被積分関数が x 変数を含まない関数 であることに注意する．

$$f_y(y,z) = \boxed{\qquad\qquad}, \quad f_z(y,z) = \boxed{\qquad\qquad}$$

より，オイラー–ラグランジュ方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)] \\ y(0) = 0,\ y(a) = A \end{cases}$$

は，

$$\frac{d}{dx}\left\{ \boxed{\qquad\qquad\qquad} \right\} = \boxed{\qquad\qquad}$$

となる．被積分関数が x 変数を含まないことに注目し，左辺の $\frac{d}{dx}$ を外す．

Lemma

x 変数を含まない関数 $f(y,z)$ に対して，オイラー–ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

は，以下のように変形できる：

$$\boxed{} = c \quad (\ c \text{ は定数})$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = c \quad (\ c \text{ は定数})$$

証明

オイラー–ラグランジュ方程式の両辺に $y'(x)$ を掛け，x に関して不定積分すると，

$$c = \int y'(x) \tfrac{d}{dx} f_z[y(x)]\, dx - \int y'(x) f_y[y(x)]\, dx$$

を得る．さらに部分積分で変形すると，

$$\begin{aligned} c &= y'(x) f_z[y(x)] - \int y''(x) f_z[y(x)]\, dx - \int y'(x) f_y[y(x)]\, dx \\ &= y'(x) f_z[y(x)] - \int \{ y''(x) f_z[y(x)] + y'(x) f_y[y(x)] \}\ dx. \end{aligned}$$

ここで，被積分関数 $f(y, z)$ が x 変数に依存していないので，最後の不定積分は $f[y(x)]$ に等しい．実際，

$$\tfrac{d}{dx} f[y(x)] = \tfrac{d}{dx} f(y(x), y'(x)) = f_y(y(x), y'(x)) \cdot y'(x) + f_z(y(x), y'(x)) \cdot y''(x)$$

である．

補題を用いると，

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= \boxed{\qquad\qquad\qquad}
\end{aligned}
$$

を得る．この式の両辺を自乗して $y'(x)$ について解くと，

$$y'(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}$$

を得る．いま，$y'(x)$ が負でない解を探したいので，

$$y'(x) = \sqrt{\frac{1}{2gc_1^2 y(x)} - 1}$$

を解く．実はこの式は，変数分離型という微分方程式に分類され，うまく解くことができる．

最速降下線

微分方程式の解の定数を置き直し，θ によるパラメータ表示を用いると，

$$\begin{cases} x = c(\theta - \sin\theta) \\ y = c(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

を得る．したがって，停留関数はサイクロイドであることがわかる．

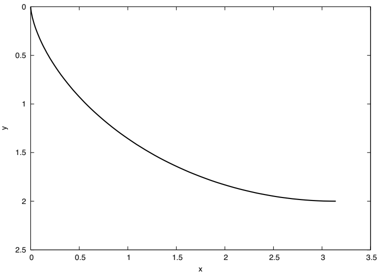


Figure: 最速降下線: サイクロイド $x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$

制約付き変分問題

関数 $y(x)$ のグラフで縄の形を表す．縄の両端の高さを h, 長さを l, 密度を m とする．両端の座標を (a,h), (b,h) とする．縄は位置エネルギーを最小にするような形をとるので, 位置エネルギー

$$\int_a^b \left(m\sqrt{1+y'(x)^2}gy(x) \right) dx$$

を, 長さ

$$\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell$$

両端 $y(a)=y(b)=h$ という条件のもとで最小にする関数 $y(x)$ を見つければよい．

$$
\begin{aligned}
\text{最小化 } F(y) &= \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\
G(y) &= \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = l \\
& y(a) = h,\ y(b) = h
\end{aligned}
$$

の停留関数を求める.
汎関数 F と G の被積分関数はそれぞれ，x 変数を含まない関数

$$
f(y,z) = \boxed{}, \quad g(y,z) = \boxed{}
$$

となり，実数 λ に対してラグランジュ関数は

$$
\tilde{f}(y,z) = \boxed{}
$$

となる．このラグランジュ関数も x 変数を含まないので，補題より，オイラー–ラグランジュ方程式は

$$
y'(x)\tilde{f}_z[y(x)] - \tilde{f}[y(x)] = c \ (\ c \text{ は定数})
$$

と変形できる.

いま，$\tilde{f}_z(y,z) = \boxed{\qquad\qquad}$ より，これを変形したオイラー–ラグランジュ方程式に代入すると

$$c_1 = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

をえる．$y'(x)$ について整理すると

$$y'(x) = \pm\sqrt{\left\{\frac{y(x)+\lambda}{c}\right\}^2 - 1}$$

を得る．ここで，$u(x) = \frac{y(x)+\lambda}{c}$ とおくと

$$cu'(x) = \pm\sqrt{u(x)^2 - 1}$$

は変数分離形の微分方程式である．

微分方程式を解いて，$u(x)$ を $y(x)$ に戻すと，

$$y(x) = c\cosh\left(\frac{x+d}{c}\right) - \lambda$$

となることが分かる．定数 c, d, λ は制約条件を満たすように決めればよい．

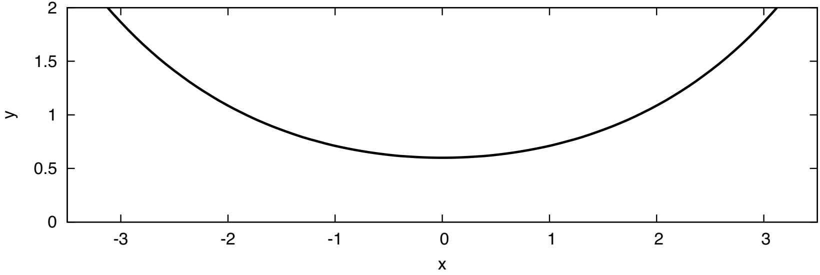


Figure: 懸垂線