

# 最適化数学 第5回

## [今回の項目]

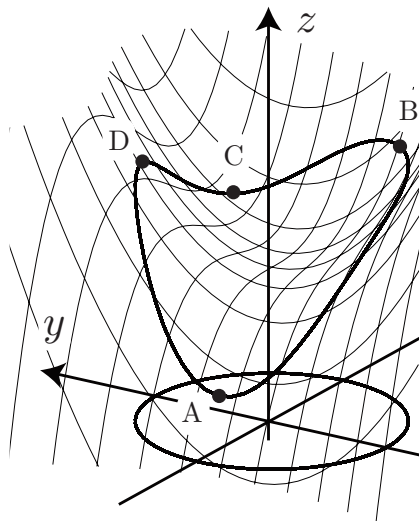
- ① 制約つき最適化問題
- ② 最適解の種類
- ③ 曲線上の増減表
- ④ ラグランジュ乗数法
- ⑤ 例題

# 制約つき最適化問題

2 変数関数を  
円周上で最小化する問題を考える：

$$\begin{aligned} & \text{最小化又は最大化 } x^3 - xy + y^2 + 2 \\ & \text{制約 } x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

図より、最適解は点 A である。  
それでは、このような図がな  
いとき、計算によって最適解を見つ  
けるにはどうしたらよいだろうか？

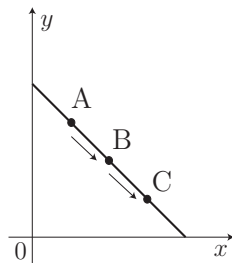


# 周長が一定のとき，面積最小の長方形は？

最大化  $f(x, y) := xy$

制約  $x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0$

$(x, y)$	A		B		C
$f(x, y)$					



ここで  $x + y = 4$  より，

$$xy = x(4 - x) = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$$

と変形できる．点が  $A: (1, 3) \rightarrow B: (2, 2) \rightarrow C: (3, 1)$  と動くとき， $f(x, y) = xy$  の値は，表のように変化する．

よって  $x + y = 4$  を満たし， に近い点の中で， $f(x, y)$  の値が一番大きくなるのは  においてである．したがって，一辺が2の正方形のとき面積が最大になる．

# 制約つき最適化問題の定義

集合  $C$  を数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  の部分集合として,

$$\text{最小化 } f(x)$$

$$\text{制約 } x \in C$$

を  と呼ぶ。ここで、集合  $C$  を   $C$  の点を  と呼ぶ。ただし、「 $x \in C$ 」とは「 $x$  が  $C$  に含まれる」ことを意味する。

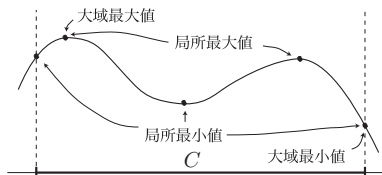
$C$  は、例えば上述の制約

$$x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0$$

のように式を用いて表される。このような式を **制約式** と呼ぶ。当然、制約つき最適化問題においても最小化する関数  $f(x)$  は **目的関数** と呼ばれる。

# 最適解の種類

$$\begin{aligned} \text{(P) 最小化} \quad & f(x) \\ \text{制約} \quad & x \in C \end{aligned}$$



## [定義]

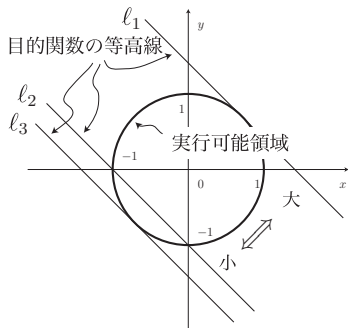
$\bar{x} \in C$  が  $\bar{x}$  に十分近い  $C$  上のすべての  $x$  に対して  $f(x) \geq f(\bar{x})$  のとき,  $\bar{x}$  を **局所最小解**,  $f(\bar{x})$  を (P) の **局所最小値** と呼ぶ.

## [定義]

$\bar{x} \in C$  が  $C$  上のすべての  $x$  に対して  $f(x) \geq f(\bar{x})$  のとき,  $\bar{x}$  を **大域最小解**,  $f(\bar{x})$  を (P) の **大域最小値** と呼ぶ.

最小解と最大解を合わせて最適解と呼ぶ. 最適値も同様である.

# 1 次関数を円周上で最適化



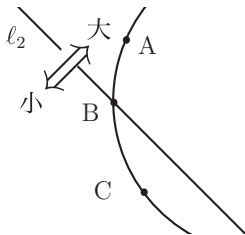
始めに、円周上で 1 次関数を最小化または最大化する問題を考える;

$$\begin{aligned} \text{最小化または最大化} \quad & x + y \\ \text{制約} \quad & x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

直線  $l_2$  は、 $f(x, y) := x + y = \square$  を満たす直線であり、 $f$  の等高線になっている。また、直線  $l_1, l_3$  もある値に対する  $f$  の等高線である。ここで、等高線上での  $f(x, y)$  の値は  $\square$  の順で大きくなる。以下で、 $f$  の等高線と 局所最適解 の関係について勉強しよう。

## 円と $l_2$ の位置関係

まず,  $f$  の等高線  $l_2$  と円との交点の近くを詳しく調べる.



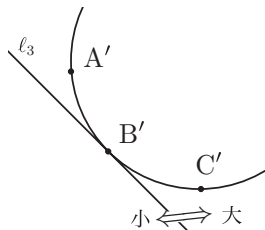
図で点が  $A \rightarrow B \rightarrow C$  と動くとき, 関数  $f$  の値は

$l_2$  と円の交点の近く

$(x, y)$	A		B		C
$f(x, y)$					

と変化するのが読み取れるだろう. よって, 等高線  $l_2$  と円の交点  
は .

## 円と $l_3$ の位置関係



一方，上図より，等高線  $l_3$  と円の接点付近では

$l_3$  と円の接点の近く

$(x, y)$	A'		B'		C'
$f(x, y)$					

と変化する．ここで， $l_3$  は円の接線で，接点は  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  である．表より接点に近い円周上の点の中では，接点

$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  で  $f(x, y)$  の値が一番  ．したがって， $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  が局所最小解である．



# 一般の関数の等高線

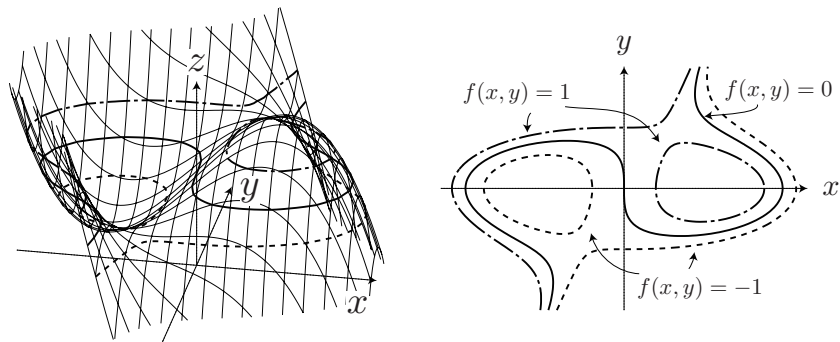
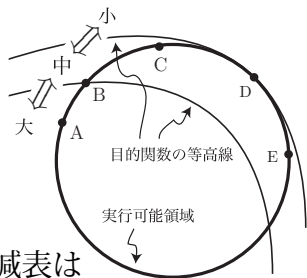


Figure:  $f(x, y) = -x^3 - 3xy^2 + y^3 + 3x$  のグラフと等高線

# 一般の関数を円周上で最適化

目的関数の等高線が図のようになっていると仮定する. このとき, A, B, C, D, E のどの点が局所最小解または局所最大解だろうか?



図で点を  $A \rightarrow B \rightarrow C$  と動かすと, 増減表は

$(x, y)$	A		B		C
$f(x, y)$					

となる. したがって, 点  は . 一方, 点を  $C \rightarrow D \rightarrow E$  と動かすと, 増減表は

$(x, y)$	C		D		E
$f(x, y)$					

となるので, 点  は .

# 一般の関数を一般の曲線上で最適化

上記の考察より,

局所最適解で

と

は接する

ということがわかる. これより以下の定理を得る.

[定理] (ラグランジュ乗数法)

最小化または最大化  $f(x)$

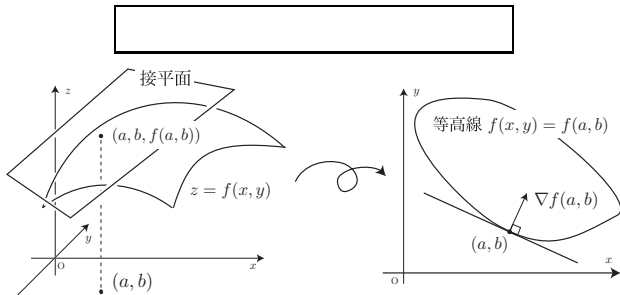
制 約  $g(x) = 0$

に対して,  $\bar{x}$  を局所最適解とする.  $\nabla g(\bar{x}) \neq \mathbf{0}$  ならば, ある数  $\lambda$  が存在して,

が成り立つ.

# 勾配ベクトルと等高線は直交している

以下で定理の意味を説明する．曲面  $z = f(x, y)$  の  $(a, b)$  における接平面：



点  $(a, b, f(a, b))$  を通り  $xy$  平面に平行な平面  $z = f(a, b)$  で、グラフと接平面を切った時の断面は、右図になる．グラフの断面は ，接平面の断面は  になる．また、この接線は接平面と平面  との交線なので、

**【等高線の接線の式】**

よって、勾配ベクトル  $\nabla f(a, b) = \begin{bmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{bmatrix}$  と  は  している。

# 勾配ベクトルの向きは、関数の増える方向

さらに、接平面の式

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で、点  $(a, b)$  を  $\nabla f(a, b)$  方向へ移動した点

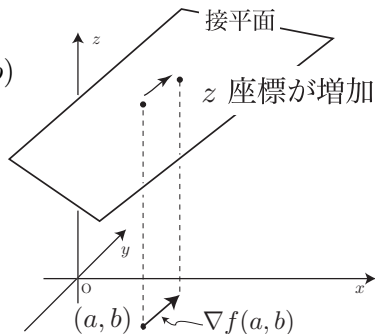
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

における  $z$  座標を調べると

$$z = \quad > f(a, b)$$

となるので、 $\nabla f(a, b)$  は接平面の  $z$  座標が増加する方向を向いている。よって、

**勾配ベクトルは関数値が増える方向を向いている**



## [定理] (ラグランジュ乗数法)

最小化または最大化  $f(x, y)$

制約  $g(x, y) = 0$

に対して,  $\bar{x} = (a, b)$  を局所最適解とする.  $\nabla g(\bar{x}) \neq \mathbf{0}$  ならば, ある数  $\lambda$  が存在して, 以下が成り立つ:

$$\boxed{\phantom{0}}, \quad \boxed{\phantom{0}}$$

### 解説.

制約は  $g(x, y) = 0$  なので, 実行可能領域は  $g$  の等高線. よって,

$\nabla f(\bar{x})$   $\boxed{\phantom{0}}$  {  $f$  の等高線 }  $\boxed{\phantom{0}}$  { 実行可能領域 }  $\boxed{\phantom{0}}$   $\nabla g(\bar{x})$

よって,  $\nabla f(\bar{x})$  と  $\nabla g(\bar{x})$  は平行. □

# 制約付き停留点

## [定義]

ある実数  $\lambda$  に対して, 
$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

を満たす点  $\bar{x}$  を**制約つき停留点**と呼ぶ. ただし, 省略しても誤解がない場合は, 単に停留点と呼ぶ.

実行可能領域に関する停留点

局所最適解

大域最適解

# 最適解の存在定理

証明はしないが、最適解の存在定理を一つ挙げておく。

## [定理]

目的関数が連続で、実行可能領域が有界閉集合ならば、最適化問題は  
大域最小解と大域最大解を持つ。

有界閉集合とは、大きさに限りがあって、中も端もつまっている  
集合。例えば、 $[0, 1]$  は有界閉集合だが、 $(0, 1)$ 、 $[0, \infty)$  は有界閉集  
合ではない。特に等式制約を持つ最適化問題は、実行可能領域が  
有界閉集合になる場合が多い。



# 例題

最小化  $f(x, y) := x - y$

制約  $g(x, y) := 2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$

# 練習問題

- (1) 最小化  $x + 2y$   
制約  $2x^2 + y^2 = 1$
- (2) 最小化  $3x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz$   
制約  $x + y + z = 1$