最適化数学 第 6 回

[今回の項目]

1. 復習：ラグランジュ乗数法
2. 等式制約が複数ある場合
3. 不等式制約問題

復習：制約が一つの場合

$$\begin{array}{ll} \textbf{最小化} & f(x,y) := x - y \\ \textbf{制　約} & g(x,y) := 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

[定理]

$$\begin{array}{rl} \textbf{最小化または最大化} & f(x) \\ \text{制　約} & g(x) = 0 \end{array}$$

に対して，$\bar{x}$ を局所最適解とする．$\nabla g(\bar{x}) \neq \mathbf{0}$ ならば，ある数 λ が存在して，以下が成り立つ：

$$\boxed{\phantom{\nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla g(\bar{x}) = \mathbf{0}}}$$

今回の話題：制約が二つの場合は？

$$\begin{array}{ll} \textbf{最小化} & f(x,y,z) := z \\ \textbf{制　約} & g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \\ & g_2(x,y,z) := 3x - \sqrt{3}y + z - 3\sqrt{3} = 0 \end{array}$$

等式制約が二つある場合

［定理］

最小化問題

$$\begin{array}{ll}\textbf{最小化} & f(x) \\ \textbf{制　約} & g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0\end{array}$$

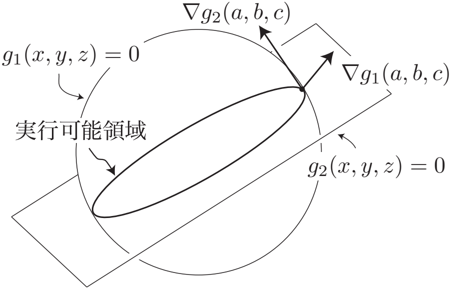
を考え，$\bar{x}$ を局所最小解とする．$\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})$ が一次独立ならば，ある数 λ_1, λ_2 が存在して，以下が成り立つ：

定理の解説

制約式が複数の場合は 3 変数の問題を考えた方が良い．α，β，γ，δ を定数とする．以下の問題に対して，$\bar{x} = (a, b, c)$ を局所最小解とする．

最小化 $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$

制　約 $\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$



等高面

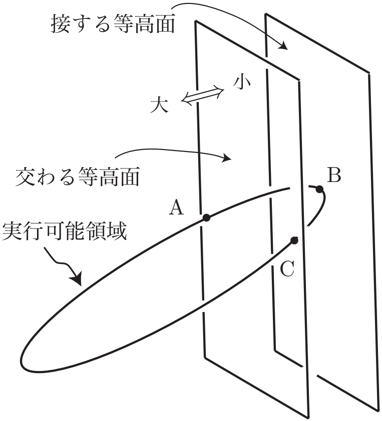
3 変数関数が同じ値をとる点 (x, y, z) の集合

$$f(x, y, z) = (\text{定数})$$

を **等高面** と呼ぶ.
点が A $\to$ B $\to$ C と動くとき,
増減表は

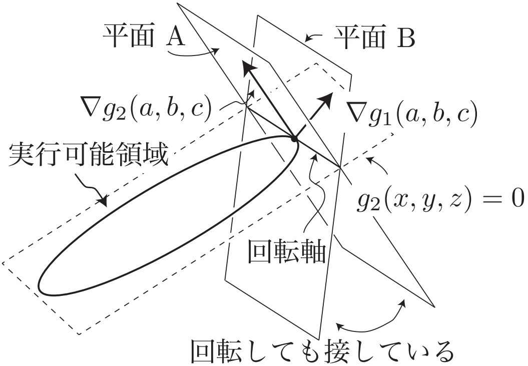
(x, y)	A		B		C
$f(x, y)$					

となる. よって, 点 B で $\boxed{}$ をとる.



局所最適解で目的関数の等高面は $\boxed{}$ と $\boxed{}$

実行可能領域と接する平面



一方，実行可能領域に接する平面の法線ベクトルは，回転させた平面も含めてすべて，

と書ける.

等式制約が二つある場合

[定理]

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & f(x) \\
\textbf{制　約} & g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0
\end{array}
$$

に対して，$\bar{x}$ を局所最小解とする．$\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})$ が一次独立ならば，ある数 λ_1, λ_2 が存在して，以下が成り立つ：

(a, b, c) は局所最小解

$\Rightarrow$ 局所最小解で $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ と実行可能領域は接する

$\Rightarrow$

例題

$$
\begin{aligned}
\textbf{最小化} \quad & z \\
\textbf{制　約} \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\
& x - y + z = 4
\end{aligned}
$$

練習問題

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & x^2 + y^2 \\
\textbf{制　約} & 2x + y + z = 1 \\
 & x - y - z = 0
\end{array}
$$

不等式制約問題

Example (射影問題)

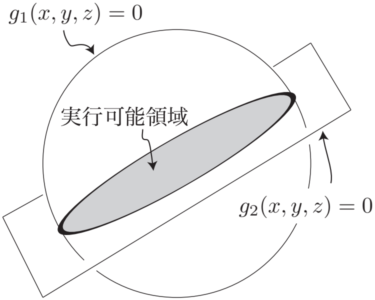
平面 $4x+y+2z=2$ と単位球の内部 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ との共通部分の点で，点 $(2,3,4)$ までの距離が一番近い点を求めよ．この問題は

$$\begin{array}{ll}\textbf{最小化} & f(x,y,z) := (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \\ \textbf{制　約} & g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1\leq 0 \\ & g_2(x,y,z) := 4x+y+z-2=0\end{array}$$

と定式化できる．すると制約式に不等式と等式が現れる．

射影問題

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & f(x,y,z) := (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \\
\textbf{制　約} & g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \le 0 \\
 & g_2(x,y,z) := 4x + y + z - 2 = 0
\end{array}
$$



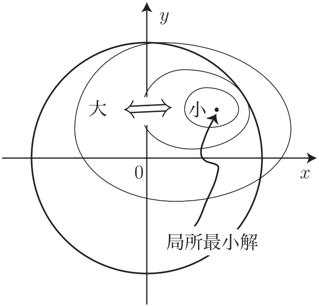
不等式が一つの場合

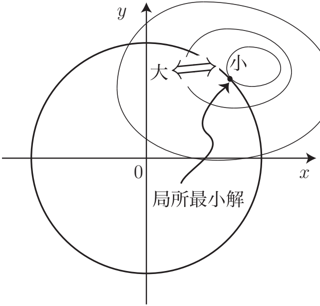
まず制約式が円周とその内部を表す不等式一つのみの場合

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \textbf{最小化} & f(x,y) \\
 & \text{制　約} & g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0
\end{array}
$$

(a,b) を局所最小解とすると，次の二つの場合が考えられる：

1. (a,b) が円の内部にある $(g(a,b) \qquad)$ 場合
2. (a,b) が円周上にある $(g(a,b) \qquad)$ 場合





最小解 (a,b) が円の内部にある $(g(a,b)<0)$ 場合

このとき,

が成り立つ.

解説 (a,b) は制約なしの最小化問題

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}') & \textbf{最小化} & f(x,y) \\
 & \textbf{制　約} & \text{なし}
\end{array}
$$

の局所最小解でもある. これを次の具体例で説明する.

$$
\begin{cases}
\text{最小化} & x^2+y^2 \\
\text{制　約} & x^2+y^2 \leq 1
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\text{最小化} & x^2+y^2 \\
\text{制　約} & \text{なし}
\end{cases}
$$

左側の問題の最小解は $\boxed{}$ である. この最小解は, 実行可能解の内部に含まれているので, 制約を外した右側の問題の最小解も $\boxed{}$ になる. 一般の場合も同様である. よって, 制約なし最適化問題の最適性条件より, $\boxed{}$ が成り立つ.

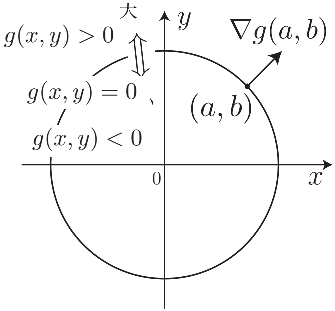
最小解 (a,b) が円周上にある $(g(a,b)=0)$ 場合

このとき，ある実数 λ が存在して，

が成り立つ.（λ の符号に注意）.

解説 一般的に $\nabla g(a,b)$ は g の等高線に $\boxed{}$ し，g の値が $\boxed{}$ 方向を向いている.

一方 $\{-\nabla f(a,b)\}$ は，目的関数 f の等高線に $\boxed{}$ し，値が $\boxed{}$ 方向なので前出の図の右図より，実行可能領域の $\boxed{}$ を向いている．よって，二つのベクトルが同じ方向を向いていることから



となる.

KKT 条件

上記二つの場合をまとめて書くと，

［定理］

最小化問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{制　約} & g(x) \le 0 \end{array}$$

に対して，$\bar{x}$ が局所最小解であり，$\nabla g(\bar{x}) \neq \mathbf{0}$ ならば，ある数 λ が存在して，以下が成り立つ：

$$(*) \quad \left\{ \right.$$

$$(*) \quad \left\{ \vphantom{\begin{array}{l} a\\ b\\ c\\ d \end{array}} \right.$$

証明.

- $g(\bar{x}) < 0$ のときは，上記議論の (1) より $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ が成り立つ．$\lambda = 0$ とおくと，$-\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} = \lambda \nabla g(\bar{x})$ かつ $\lambda g(\bar{x}) = 0$ となるので，$(*)$ が成り立つ.
- $g(\bar{x}) = 0$ のときは，上記議論の (2) より，ある実数 λ が存在して，$-\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$, $\lambda \geq 0$ が成り立つ．また，$g(\bar{x}) = 0$ より $\lambda g(\bar{x}) = 0$ なので，$(*)$ が成り立つ.

$\square$

例題

最小化　$f(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$

制　約　$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

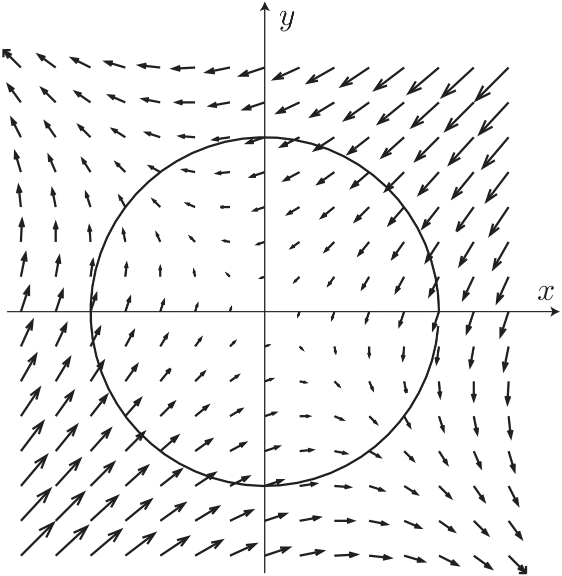


Figure: 点 $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ で $-\nabla f(x, y)$ が直交外側を向いている.

練習問題

最小化　$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$

制　約　$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$