最適化数学 第 9 回

[今回の項目]

1. 復習；線形計画問題，単体法
2. ピボット

線形計画問題

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(P)} & \textbf{最小化} & -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & \\
& \textbf{制　約} & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 2 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
& & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\
& & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

まず，問題 (P) を **スラック変数** と呼ばれる x_4, x_5, x_6 を導入して次の同値な問題に変形する．

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\textbf{最小化} & -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \\
\textbf{制　約} & x_1 & & & + & x_3 & = 2 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = 6 \\
& \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

2. 辞書を作る

スラック変数を導入した問題の制約式でスラック変数 x_4, x_5, x_6 を左辺に残し，残りを右辺へ移項し，目的関数を z とおく．

（辞書 1 ）

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\textbf{最小化} & z = & & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 \\
\textbf{制　約} & x_4 = & 2 & - & x_1 & & & - & x_3 \\
 & x_5 = & 5 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
 & x_6 = & 6 & - & 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
 & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

左辺に現れる変数 x_4， x_5， x_6 を $\boxed{\qquad\qquad}$, 右辺に現れる変数 x_1， x_2， x_3 を $\boxed{\qquad\qquad}$ と呼ぶ．ここで,

基底変数は，目的関数の変数に含まれていない

ことに注意しよう．この形を線形計画問題の $\boxed{\qquad\qquad}$ と呼ぶ.

3. 実行可能基底解を求め，4. 解の更新を行う

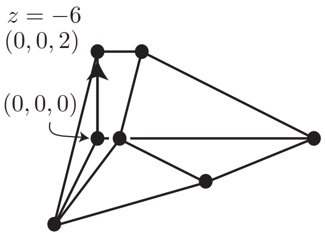
（辞書１） **最小化** $z = \quad - \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3$

制　約
$$
\begin{aligned}
x_4 &= 2 - x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 \\
x_5 &= 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

まず更新ルール (i) より，目的関数 z で，係数が負である非基底変数 x_3 を選ぶ．ここで，$x_3 = t$, その他の非基底変数 $x_1 = x_2 = 0$ とおくと，以下を得る：

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}
$$

5. 辞書の更新



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2-t \\ 5-2t \\ 6-2t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

[非基底変数] $\boxed{}$ $\rightarrow$ 正

[基底変数] $\boxed{}$ $\rightarrow 0$

より，$\boxed{}$ と $\boxed{}$ を入れ換える；

（辞書 2 ）

最小化

$$z = -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4$$

制　約

$$\begin{aligned}
x_3 &= 2 - x_1 - x_4 \\
x_5 &= 1 - x_2 + 2x_4 \\
x_6 &= 2 - x_1 - x_2 + 2x_4 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

6. 反復

（辞書 3 ） **最小化** $z = -8 + 2x_1 - x_4 + 2x_5$

制　約

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2 - x_1 - x_4 \\
x_2 &= 1 + 2x_4 - x_5 \\
x_6 &= 1 - x_1 + x_5 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

（辞書 4 ） **最小化** $z = -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5$

制　約

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 2 - x_1 - x_3 \\
x_2 &= 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\
x_6 &= 1 - x_1 + x_5 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

目的関数のすべての変数の係数が零以上なので，最適解は

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$ のとき，最適値は $\boxed{}$ をとる．

ピボット

(辞書 1) **最小化** $z = \quad - \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3$

制 約

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 2 - \ \ x_1 \qquad\quad\ \ - \ \ x_3 \\
x_5 &= 5 - 2x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 6 - 3x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

単体法のより簡便な記法を紹介する．辞書 1 を次のように書くこととする：

$$
\text{(D1)} \quad
\begin{array}{l}
z = \quad - \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
\hline
x_4 = 2 - \ \ x_1 \qquad\quad\ - \ \ x_3 \\
x_5 = 5 - 2x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 \\
x_6 = 6 - 3x_1 - \ \ x_2 - 2x_3
\end{array}
$$

ここで，$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$ はどの辞書でも変わらないので省略する．増加させる非基底変数として $\boldsymbol{x_3}$ を選ぶと，$\boxed{}$ 始めに 0 になるので，左辺に $\boxed{}$ がある式の x_3 を **ピボット** と呼び，丸で囲む．

このピボットに注目すると，制約第 2 式の右辺から x_3 を消去するためには，

$$
\begin{array}{rrcl}
 & x_5 & = & 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\
(-2) \times & x_4 & = & 2 - x_1 - x_3 \\
\hline
 & x_5 - 2x_4 & = & 1 - x_2 \\
 & & \Downarrow & \\
 & x_5 & = & 1 - x_2 + 2x_4
\end{array}
$$

と計算すればよい．このような計算を他の式にも適用して，新しい辞書を得る．

$$
\text{(D2)} \quad
\begin{array}{rcl}
z & = & -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\
\hline
x_3 & = & 2 - x_1 - x_4 \\
x_5 & = & 1 - x_2 + 2x_4 \\
x_6 & = & 2 - x_1 - x_2 + 2x_4
\end{array}
$$

(D2) の右辺から消去する変数を x_2 とする．x_2 を増加させたとき，始めに 0 に達する基底変数は $\boxed{}$ なので，ピボットが決まり，そこに丸をつける．右辺から x_2 を消去すると，新しい辞書は

$$
\text{(D3)}\quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & -8 & + & 2x_1 & - & x_4 & + & 2x_5 \\
\hline
x_3 & = & 2 & - & x_1 & - & x_4 & & \\
x_2 & = & 1 & & & + & 2x_4 & - & x_5 \\
x_6 & = & 1 & - & x_1 & & & + & x_5
\end{array}
$$

となる．(D3) で右辺から消去する変数を x_4 とする．x_4 を増加させたとき，始めに 0 に達する基底変数は $\boxed{}$ なので，ピボットがきまり，そこに丸をつける．新しい辞書は

$$
\text{(D4)}\quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & -10 & + & 3x_1 & + & x_3 & + & 2x_5 \\
\hline
x_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_3 & & \\
x_2 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & x_5 \\
x_6 & = & 1 & - & x_1 & & & + & x_5
\end{array}
$$

である．ここで目的関数の変数の係数がすべて 0 以上であるので，単体法が終了し，最適値 -10 を得る．

略記法

(D1)
$$\begin{array}{rcl} z &=& \quad - \ x_1 - 2x_2 - 3\boldsymbol{x_3} \\ \hline \boldsymbol{x_4} &=& 2 - x_1 \qquad\quad - x_3 \\ x_5 &=& 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &=& 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

(D2)
$$\begin{array}{rcl} z &=& -6 + 2x_1 - 2\boldsymbol{x_2} + 3x_4 \\ \hline x_3 &=& 2 - x_1 \qquad\quad - x_4 \\ \boldsymbol{x_5} &=& 1 \qquad\quad - x_2 + 2x_4 \\ x_6 &=& 2 - x_1 - x_2 + 2x_4 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

(D3)
$$\begin{array}{rcl} z &=& -8 + 2x_1 - \boldsymbol{x_4} + 2x_5 \\ \hline \boldsymbol{x_3} &=& 2 - x_1 - x_4 \\ x_2 &=& 1 \qquad\quad + 2x_4 - x_5 \\ x_6 &=& 1 - x_1 \qquad\quad + x_5 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

(D4)
$$\begin{array}{rcl} z &=& -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5 \\ \hline x_4 &=& 2 - x_1 - x_3 \\ x_2 &=& 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\ x_6 &=& 1 - x_1 \qquad\quad + x_5 \end{array}$$

よって，$(x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 0)$ のとき，最小値 -10 を取る．

例題

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{最小化} & -x_1 - 2x_2 \\
\textbf{制　約} & x_1 + x_2 \le 3 \\
 & -2x_1 + x_2 \le 2 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

(D1)
$$
\begin{array}{rcl}
z & = & - x_1 - 2\boldsymbol{x_2} \\
\hline
x_3 & = & 3 - x_1 - x_2 \\
\boldsymbol{x_4} & = & 2 + 2x_1 - x_2
\end{array}
$$

$\Downarrow$

(D2)
$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -4 - 5\boldsymbol{x_1} + 2x_4 \\
\hline
\boldsymbol{x_3} & = & 1 - 3x_1 + x_4 \\
x_2 & = & 2 + 2x_1 - x_4
\end{array}
$$

$\Downarrow$

(D3)
$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -\frac{17}{3} + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
\hline
x_1 & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_2 & = & \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4
\end{array}
$$

よって，最小解は $(\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$ で，最小値は $-\frac{17}{3}$ となる.

練習問題

(1) **最小化** $-4x_1 - 5x_2$

制　約

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 10 \\
3x_1 + 7x_2 &\leq 42 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(2) **最小化** $-2x_1 + x_2 - x_3$

制　約

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 40 \\
x_1 + x_3 &\leq 25 \\
2x_2 + 3x_3 &\leq 32 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

例外処理

さて，前節の例では特別な問題なしに単体法を適用できたが，実際には次の 4 つ例外的な場合がある：

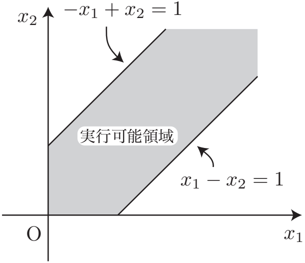
(1) 問題が非有界	(2) 辞書の退化
(3) 辞書の巡回	(4) 初期点が実行不可能

(1) 問題が非有界

最小化 $\quad -x_1$

制　約

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\le 1 \\
-x_1 + x_2 &\le 1 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



(D1)
$$
\begin{array}{l}
z = \quad - x_1 \\
\hline
x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\
x_4 = 1 + x_1 - x_2
\end{array}
$$

(D2)
$$
\begin{array}{l}
z = -1 - x_2 + x_3 \\
\hline
x_1 = \quad 1 + x_2 - x_3 \\
x_4 = \quad 2 \qquad\quad - x_3
\end{array}
$$

ここで，x_2 の値はいくらでも $\boxed{}$ できる．よって，目的関数値をいくらでも $\boxed{}$ できるので，最適解は存在しない．このような問題を **非有界な線形計画問題**，または単に **非有界な問題** と呼ぶ．

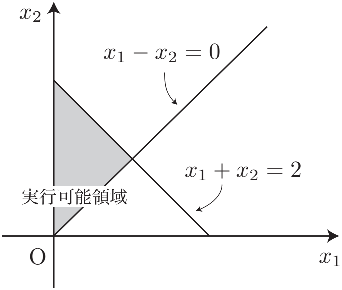
(2) 辞書の退化

最小化 $\quad -x_1$

制　約 $\quad x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$



$$
\text{(D1)} \quad
\begin{array}{rcl}
z & = & -\ x_1 \\
\hline
x_3 & = & -\ x_1 + x_2 \\
x_4 & = & 2 - x_1 - x_2
\end{array}
$$

このような辞書を $\boxed{}$ した辞書と呼ぶ.

x_3 と x_1 を入れ換えて辞書を更新する.

$$
\text{(D1)} \quad
\begin{array}{rcl}
z & = & -\ x_2 + x_3 \\
\hline
x_1 & = & +\ x_2 - x_3 \\
x_4 & = & 2 - 2x_2 + x_3
\end{array}
$$

$$
\text{(D2)} \quad
\begin{array}{rcl}
z & = & -1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
\hline
x_1 & = & 1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 & = & 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4
\end{array}
$$

(3) 辞書の巡回

退化した辞書が無限に続く場合がある．このような現象を **巡回** と呼ぶ．巡回を避けるには，**ブランドのピボット選択法** を用いればよい：

1. 解の更新ルール (i) で非基底変数を選ぶときに，添字が最小のものを選ぶ
2. 選んだ非基底変数を増やすことで 0 になる基底変数が複数ある場合，それらの中で添字が最小のものを選ぶ.

(4) 初期点が実行不可能

最小化 $-x_1$

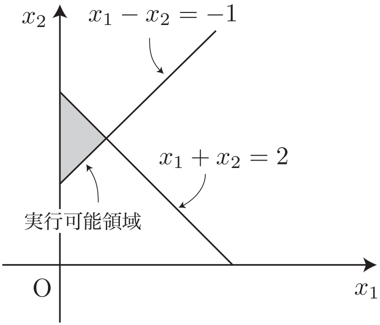
制　約

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le -1 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(D1)

$$\begin{array}{rcl} z &=& \quad\quad - x_1 \\ \hline x_3 &=& -1 - x_1 + x_2 \; \color{red}{(*)} \\ x_4 &=& 2 - x_1 - x_2 \end{array}$$

$(x_1, x_2) = (0, 0)$ が実行不可能.



以下の問題を考える：

(A)

最小化 $z = x_5$

制　約

$$\begin{aligned} x_5 &= 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ x_4 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_1, x_2, &x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

ここで，目的関数は

$x_5 = x_3 - (-1 - x_1 + x_2)$

である．x_5 の右辺は，定数項が正になるように (D_1) の制約第 1 式 $(*)$ の両辺の差をとる．すると x_5 は，等式 $(*)$ の両辺の非負の誤差を表す．

$$\text{(A1)} \quad \begin{array}{rcl} z &=& 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ \hline x_5 &=& 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ x_4 &=& 2 - x_1 - x_2 \end{array} \qquad \text{(A2)} \quad \begin{array}{rcl} z &=& + x_5 \\ \hline x_2 &=& 1 + x_1 + x_3 - x_5 \\ x_4 &=& 1 - 2x_1 - x_3 + x_5 \end{array}$$

となり，最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$，最適値 0 を得て，問題 (A) に対する単体法が終了する．(A) に $x_5 = 0$ の実行可能解があるということは，(D1) の制約式を満たす解が存在するということである．
最適値が正ならば，(D1) の制約（特に $(*)$）を満たすような (x_1, x_2) は存在しないことになる．

ここで，(A2) の制約で $x_5 = 0$ とおき，(D1) の目的関数を用いて，辞書

$$\text{(D2)} \quad \begin{array}{rcl} z &=& - x_1 \\ \hline x_2 &=& 1 + x_1 + x_3 \\ x_4 &=& 1 - 2x_1 - x_3 \end{array}$$

を作成すると，この辞書に対して単体法が実行できる．