

## 最適化数学 講義ノート 5 (担当: 関口 良行)

### 1 非線形計画

制約付き最適化問題は以下のような一般型をもつ.

$$(P) \text{ 最小化 } J(\boldsymbol{x}) \\ \text{制約 } \boldsymbol{x} \in C$$

今まで, 制約  $C$  が区間と等式で定義される場合を扱ってきたが, 一般的に等式と不等式を制約に持つ場合を考える.

例 1 (射影問題). 平面  $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$  と単位球の内部  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  との共通部分の点で, 点  $(2, 3, 4)$  までの距離が一番近い点を求めたいとする. するとこの問題は

$$\begin{aligned} &\text{最小化 } J(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 4)^2 \\ &\text{制約 } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \\ &\quad 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

と書ける. この実行可能領域を  $C$  で表すと, これは  $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2$  とおくことによって,

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x_1, x_2, x_3) \leq 0, f_2(x_1, x_2, x_3) = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

と書ける. この問題の最適解は点  $(2, 3, 4)$  の集合  $C$  への射影と呼ばれる.

この例を解く時も,  $C$  に関する停留点,  $-\nabla J(x_1, x_2, x_3) \in N_C(x_1, x_2, x_3)$  を満たす点を見つけることによって解く. よって, この集合に対する法線錘を計算することが鍵となる.

#### 1.1 法線錘の一般公式

一般に,

$$\begin{aligned} C = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid & f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \dots, l, \\ & f_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = l + 1, \dots, m, \quad a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n \} \end{aligned}$$

のような制約を持つ最適化問題を考える. ここで,  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$  のように書いている. この集合に対する法線錘の公式を与える.

これはさらに,  $K = \{v \in \mathbb{R}^m \mid v_i \leq 0, i = 1, \dots, l, v_i = 0, i = l + 1, \dots, m\}$ ,  
 $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j\}$  とすると,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in K, x \in X\} \quad (*)$$

と書ける.

このような集合に対して以下の法線錘の公式がある.

定理 1.  $C$  を (\*) で与えられる集合,  $\bar{x} \in C$  とする. もし  $C$  が  $\bar{x}$  で制約想定 (後で説明する) を満たせば,  $C$  の  $\bar{x}$  における法線錘は

$$N_C(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^m y_i \nabla f_i(\bar{x}) + z \mid (y_1, \dots, y_m) \in N_K(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})), z \in N_X(\bar{x}) \right\}$$

と書ける.

証明. 証明は長くなるので省略する. □

定理の中で述べた制約想定とは以下のようなものである. しかし, これを詳しく説明するのはこの講義の範疇を越えるので紹介だけにしておく. 法線錘を計算する時は制約想定が満たされていることを常に仮定する. まずは定理 1 の法線錘の公式の役割を知ることが重要である.

$\bar{x} \in C$  とする. 任意の  $(y_1, \dots, y_m) \in N_K(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})), z \in N_X(\bar{x})$  に対して,

$$y_1 \nabla f_1(\bar{x}) + \dots + y_m \nabla f_m(\bar{x}) + z = 0 \Rightarrow y_i = 0, z = (0, \dots, 0)$$

が成り立つとき  $C$  は  $\bar{x}$  で制約想定を満たすという.

例えば,  $\bar{x}$  が  $a_j < x_j < b_j$  を満たすならば  $N_X(\bar{x}) = \{(0, \dots, 0)\}$  なので, 制約想定は以下ようになる:

任意の  $(y_1, \dots, y_m) \in N_K(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$  に対して,

$$y_1 \nabla f_1(\bar{x}) + \dots + y_m \nabla f_m(\bar{x}) = 0 \Rightarrow y_i = 0$$

が成り立つ.

よってこの条件は  $\{\nabla f_1(\bar{x}), \dots, \nabla f_m(\bar{x})\}$  が一次独立のとき満たされ, また勾配ベクトルの一次独立性より弱い条件になっていることがわかる.

## 1.2 いくつかの例

例 2. 初めに上げた例の実行可能領域を考える.

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 0, 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

ここで,  $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2$  とする.

集合  $C$  の  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in C$  における法線錘を制約想定が満たされていると仮定して計算する. 関数  $f_1, f_2$  の勾配ベクトルは  $\nabla f_1(\mathbf{x}) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$ ,  $\nabla f_2(\mathbf{x}) = (4, 1, 2)$  となる.  $C$  の  $\bar{x}$  における法線錘は, 区間に対する公式も使うと

$$\begin{aligned} N_C(\bar{\mathbf{x}}) &= \{y_1 \nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}) + y_2 \nabla f_2(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{z} \mid y_1 \in N_{(-\infty, 0]}(f_1(\bar{\mathbf{x}})), y_2 \in N_{\{0\}}(f_2(\bar{\mathbf{x}})), \\ &\quad z_j \in N_{[0, \infty)}(\bar{x}_j), j = 1, 2, 3\} \\ &= \{y_1(2\bar{x}_1, 2\bar{x}_2, 2\bar{x}_3) + y_2(4, 1, 2) + (z_1, z_2, z_3) \mid \\ &\quad y_1 \in N_{(-\infty, 0]}(f_1(\bar{\mathbf{x}})), y_2 \in \mathbb{R}, z_j \in N_{[0, \infty)}(\bar{x}_j), j = 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

となる.

さて,  $\bar{x}$  にさらに仮定を加えるとより単純な式が得られる. 例えば,  $f_1(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ ,  $\bar{x}_j > 0$  と仮定すると,  $N_{(-\infty, 0]}(0) = [0, \infty)$ ,  $N_{[0, \infty)}(\bar{x}_j) = \{0\}$  より,

$$N_C(\bar{\mathbf{x}}) = \{y_1(2\bar{x}_1, 2\bar{x}_2, 2\bar{x}_3) + y_2(4, 1, 2) \mid y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}\}$$

となる. また, そうではなく,  $f_1(\bar{\mathbf{x}}) < 0$ ,  $\bar{x}_j > 0$  と仮定すると,  $N_{(-\infty, 0]}(f_1(\bar{\mathbf{x}})) = \{0\}$  となり

$$N_C(\bar{\mathbf{x}}) = \{y_2(4, 1, 2) \mid y_2 \in \mathbb{R}\}$$

を得る. 法線錘の一般型は複雑な形をしているように見えるが, 実際に具体的な点が与えられれば, 法線錘は比較的簡単な式になる場合が多い.

例 3 (複数の等式制約).

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_1(\mathbf{x}) = 0, f_2(\mathbf{x}) = 0\},$$

に対して法線錘の公式を適用する. この集合には  $\mathbf{x}$  に区間などの制約がないので, 定理 1 において,  $X = \mathbb{R}^n$  とすればよい.  $\bar{\mathbf{x}} \in C$  に対して, 制約想定が満たされていれば,

$$\begin{aligned} N_C(\bar{\mathbf{x}}) &= \{y_1 \nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}) + y_2 \nabla f_2(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{z} \mid y_1 \in N_{\{0\}}(f_1(\bar{\mathbf{x}})), y_2 \in N_{\{0\}}(f_2(\bar{\mathbf{x}})), \mathbf{z} \in N_{\mathbb{R}^n}(\bar{\mathbf{x}})\} \\ &= \{y_1 \nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}) + y_2 \nabla f_2(\bar{\mathbf{x}}) \mid y_1, y_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,  $N_{\{0\}}(u) = \mathbb{R}$ ,  $N_{\mathbb{R}^n}(\bar{\mathbf{x}}) = \{(0, \dots, 0)\}$  を用いた. なお, この場合制約想定は勾配ベクトル  $\nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}), \nabla f_2(\bar{\mathbf{x}})$  の一次独立性と同値になる.

定理 1 の公式は以下の形で書かれることが多い.

定理 2 (クーン・タッカーの定理). 最適化問題

$$\begin{aligned} (P) \text{ 最小化 } & J(\mathbf{x}) \\ \text{制約 } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

とする.  $\bar{x}$  が問題 (P) の局所最小解で, 制約想定が満たされているとする. すると, ある  $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  が存在して,

$$\begin{aligned}\nabla J(\bar{x}) + y_1 \nabla f_1(\bar{x}) + \dots + y_m \nabla f_m(\bar{x}) &= 0 \\ y_i f_i(\bar{x}) &= 0, \quad f_i(\bar{x}) \leq 0, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l\end{aligned}$$

を満たす.

まず以下の補題を示しておく. 記号を用意する:

$$\begin{aligned}(-\infty, 0]^n &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\} \\ [0, \infty)^n &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}\end{aligned}$$

ベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  で要素ごとの不等号  $x_i \geq 0$  を表す.  $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$  も同様に  $x_i \leq 0$  を表す.

補題 3.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \in N_{(-\infty, 0]^n}(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0 \\ \mathbf{u} \in N_{[0, \infty)^n}(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow \mathbf{u} \leq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0\end{aligned}$$

証明.  $n = 2$  の場合を考える.

$$N_{(-\infty, 0]^2}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \in N_{(-\infty, 0]}(x_1), u_2 \in N_{(-\infty, 0]}(x_2)\}$$

となる. また

$$N_{(-\infty, 0]}(x_1) = \begin{cases} \{0\} & x_1 < 0 \\ [0, \infty) & x_1 = 0 \end{cases}$$

なので,  $u_1 \in N_{(-\infty, 0]}(x_1)$  ならば,  $x_1$  の値に関わらず,  $u_1 \geq 0, u_1 x_1 = 0$  が成り立つ. 同様に  $x_2, u_2$  についても考えると,

$$\mathbf{u} \in N_{(-\infty, 0]^2}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \geq 0, x_1 \leq 0, u_1 x_1 = 0 \\ u_2 \geq 0, x_2 \leq 0, u_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

を得る. ここで,  $u_i \geq 0, x_i \leq 0$  に対して,  $u_i x_i = 0, u_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$  となる. よって示された.  $n$  が一般の場合も同様.  $\square$

定理 2 の証明. 問題 (P) の実行可能領域を  $C$  で表す. すると  $\bar{x} \in C$  が局所最小解ならば, 基本最適性条件より,  $-\nabla J(\bar{x}) \in N_C(\bar{x})$  が成り立つ. 制約想定が満たされているので, 法線錘の公式より,

$$N_C(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^m y_i \nabla f_i(\bar{x}) \mid y_i \in N_{(-\infty, 0]}(f_i(\bar{x})), i = 1, \dots, l, y_i \in \mathbb{R}, i = l+1, \dots, m \right\}$$

を得る. また, 補題 3 の証明より  $y_i \in N_{(-\infty, 0]}(f_i(\bar{\mathbf{x}}))$  ならば  $y_i f_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, y_i \geq 0$  となる.

従って,  $-\nabla J(\bar{\mathbf{x}}) \in N_C(\bar{\mathbf{x}})$  ならば, ある  $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  が存在して,  $y_i f_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, y_i \geq 0,$

$$-\nabla J(\bar{\mathbf{x}}) = y_1 \nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}) + \dots + y_m \nabla f_m(\bar{\mathbf{x}})$$

が成り立つ. よって示された. □

### 1.3 ラグランジュ関数

最適化問題

(P) 最小化  $J(\mathbf{x})$

$$\text{制約 } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = l + 1, \dots, m$$

を考える. この問題で,  $y_i \geq 0$  に対して, ラグランジュ関数  $L$  を

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = J(\mathbf{x}) + y_1 \nabla f_1(\mathbf{x}) + \dots + y_m \nabla f_m(\mathbf{x})$$

で定義する. ここで  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  と書く. すると, 問題 (P) は

$$(P) \text{ 最小化 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{y_i \geq 0} L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

と,  $\sup$  があるので計算には向かないが, 制約なしの最適化問題として書ける. よって, 任意の  $y_i \geq 0$  に対して

$$(P_{\mathbf{y}}) \text{ 最小化 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

を考えると

$$\text{「問題 (P) の最小値」} \geq \text{「問題 (P}_{\mathbf{y}}) \text{ の最小値」}$$

が成り立つ. 問題  $(P_{\mathbf{y}})$  は問題 (P) を近似する制約なしの最適化問題になっている. この近似問題  $(P_{\mathbf{y}})$  を問題 (P) のラグランジュ緩和と呼び, 実際に計算するさいには良く用いられる.

## 1.4 線形計画と双対性

最適化問題において、以下のように目的関数と制約を与える関数がすべて一次関数のとき、問題を線形計画 (Linear Programming) と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{Lin}}) \text{ 最小化 } & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
 \text{制約 } & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
 & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

この問題は係数行列を用いて、

$$\begin{aligned}
 (P_{\text{Lin}}) \text{ 最小化 } & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{制約 } & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

と書ける。ここでベクトルの不等号は要素ごとの不等号を、 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  を表す。この問題を線形計画の主問題と呼ぶ。

これまではベクトルが縦ベクトルか横ベクトルか意識をしないですむように議論を進めてきた。しかし、この節では ベクトルはすべて縦ベクトルとする。よって、 $\mathbf{c}$  は縦ベクトル、 $\mathbf{c}^T$  は横ベクトルになり、 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  は行列の積の規則により、 $\mathbf{c}$  と  $\mathbf{x}$  の内積となる。

目的関数も実行可能領域も凸なのでこの問題はもちろん凸計画にもなる。よって実行可能領域に関する停留点は、問題の大域最小解になる。よって法線錘の公式を計算することにより、以下の定理が成り立つ。

定理 4 (相補性条件).  $\bar{\mathbf{x}}$  が  $(P_{\text{Lin}})$  の大域最小解

$$\Leftrightarrow \text{ある } \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m \text{ が存在して } \begin{cases} \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c} - A^T \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, & \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{c} - A^T \bar{\mathbf{y}}) = 0 \\ \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, & \bar{\mathbf{y}}^T (A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0 \end{cases}$$

証明. 目的関数を  $J(\mathbf{x})$ ,  $K = (-\infty, 0]$ ,  $X = [0, \infty)$ , 実行可能領域を  $C$  とする。すると、 $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{b} - A\mathbf{x} \in K, \mathbf{x} \in X\}$  と書ける。

いま問題は凸計画にもなっているので、

$$\bar{\mathbf{x}} \text{ が大域最小解 } \Leftrightarrow -\nabla J(\bar{\mathbf{x}}) \in N_C(\bar{\mathbf{x}})$$

が成り立つ。 $C$  に関する停留点の式は、定理 1 の法線錘の公式よりある  $\bar{\mathbf{y}} \in N_K(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{z} \in N_X(\bar{\mathbf{x}})$  が存在して、

$$-\mathbf{c}^T = -\bar{\mathbf{y}}^T A + \mathbf{z}^T$$

と書ける. これは  $-c + A^T \bar{y} = z$  より,

$$\text{ある } \bar{y} \in N_K(b - A\bar{x}) \text{ が存在して } -c + A^T \bar{y} \in N_X(\bar{x})$$

と同値になる. さらに補題 3 より,

$$-c + A^T \bar{y} \in N_X(\bar{x}) \Leftrightarrow -c + A^T \bar{y} \leq 0, \bar{x} \geq 0, \bar{x}^T(-c + A^T \bar{y}) = 0$$

となる. また,  $\bar{y} \in N_K(b - A\bar{x})$  も

$$\bar{y} \geq 0, b - A\bar{x} \leq 0, \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$$

と同値になるので示された. □

以下の問題を  $(P_{\text{Lin}})$  の双対問題と呼ぶ.

$$\begin{aligned} (D_{\text{Lin}}) \text{ 最大化 } & b^T y \\ \text{制約 } & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

すると, 問題  $(D_{\text{Lin}})$  実行可能領域に関する停留点が満たす条件は, 定理 4 と等しい. これより, 以下の定理を得る.

定理 5 (双対定理). 以下の (1), (2) は同値である:

(1).  $(\bar{x}, \bar{y})$  が

$$\begin{cases} \bar{x} \geq 0, c - A^T \bar{y} \geq 0, \bar{x}^T(c - A^T \bar{y}) = 0 \\ \bar{y} \geq 0, A\bar{x} - b \geq 0, \bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0 \end{cases}$$

を満たす.

(2).  $\bar{x}$  が  $(P_{\text{Lin}})$ ,  $\bar{y}$  が  $(D_{\text{Lin}})$  の最適解である.

さらに, もし  $(P_{\text{Lin}})$  と  $(D_{\text{Lin}})$  のどちらかが最適解を持てば, 両方の問題は最適解を持ち,

$$\text{「}(P_{\text{Lin}})\text{ の最適値」} = \text{「}(D_{\text{Lin}})\text{ の最適値」}$$

が成り立つ.

定義. 定理 5 (1) の条件を相補性条件と呼ぶ.

補足. 双対問題は適当に作ったものではない. 自然に導出されるものだが, それにはゲーム理論における簡単なミニマックス問題の考察が必要なので, この講義では省略する.

## 1.5 例題

### 例 4. 線形計画

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } 3x_1 + 5x_2 \\ & \text{制約 } 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ & \quad x_1 + x_2 \geq 4 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

に対して、以下の問題を解く。

(1). 相補性条件を求めよ

定理 4 より、

$$\begin{cases} \mathbf{x} \geq 0, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \geq 0, & \mathbf{x}^T \left( \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \right) = 0 \\ \mathbf{y} \geq 0, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0, & \mathbf{y}^T \left( \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = 0 \end{cases}$$

(2). 双対問題を書け

双対問題の定義より、

$$\begin{aligned} & \text{最大化 } 9y_1 + 4y_2 \\ & \text{制約 } 3y_1 + y_2 \leq 3 \\ & \quad 2y_1 + y_2 \leq 5 \\ & \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

### 例 5. 最適化問題

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } J(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 4)^2 \\ & \text{制約 } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \\ & \quad 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

で、 $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  が局所最小解であるとする。このとき  $\bar{\mathbf{x}}$  が満たす基本最適性条件を求めよ。

解説. 問題の実行可能領域を  $C$  とすると、基本最適性条件とは  $-\nabla J(x_1, x_2, x_3) \in N_C(x_1, x_2, x_3)$  のことを指す。この条件の勾配ベクトルなどを計算し、区間の法線錘を使った条件まで整理することが問題の目的である。この際、制約想定は満たされているものと仮定してよい。



いま  $\nabla J(\bar{\mathbf{x}}) = (2(x_1 - 2), 2(x_2 - 3), 2(x_3 - 4))$ ,  $C$  の法線錘は

$$N_C(\bar{\mathbf{x}}) = \{y_1(2\bar{x}_1, 2\bar{x}_2, 2\bar{x}_3) + y_2(4, 1, 2) + (z_1, z_2, z_3) \mid \\ y_1 \in N_{(-\infty, 0]}(f_1(\bar{\mathbf{x}})), y_2 \in \mathbb{R}, z_j \in N_{[0, \infty)}(\bar{x}_j), j = 1, 2, 3\}$$

となる. よって  $\bar{\mathbf{x}}$  が満たす基本最適性条件は以下のように書く.

ある  $y_1 \in N_{(-\infty, 0]}(f_1(\bar{\mathbf{x}}))$ ,  $y_2 \in \mathbb{R}$ ,  $z_j \in N_{[0, \infty)}(\bar{x}_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  が存在して,

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 = 2y_1\bar{x}_1 + 4y_2 + z_1 \\ 2x_2 - 6 = 2y_1\bar{x}_2 + y_2 + z_2 \\ 2x_3 - 8 = 2y_1\bar{x}_3 + 2y_2 + z_3 \end{cases}$$

が成り立つ.

□