最適化数学　講義ノート 8　(担当: 関口 良行)

1　制約付き変分問題

前回は

$$\text{最小化}\ J(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$
$$\text{制約}\ y(a) = A, y(b) = B$$

のような変分問題に対して, 最適解を求める手法を学んだ. この種の問題を固定端変分問題と呼ぶ.

固定端変分問題は, 実質的に制約がないように扱うことができた. より明確な制約を持つ変分問題を扱えると応用範囲が広がる.

以下のような制約を持つ問題を考える:

$$(\mathcal{P})\ \text{最小化}\ J(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$
$$\text{制約}\ C := \{y \in C^1[a,b] \mid G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))dx = l,\ y(a) = A, y(b) = B\}$$

1.1　凸汎関数に対する最適性十分条件

固定端変分問題と同様に, 特に目的関数の汎関数が凸の場合, 最適性十分条件が求まる.

定理 1. 最小化問題 $(\mathcal{P})$ において, J の被積分関数 f が凸とする. J と G の被積分関数 f, g とある定数 λ を用いて, $\tilde{f} = f + \lambda g$ としたとき, λg が凸で, 関数 $\bar{y}$ が

$$\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)],\ y(a) = A, y(b) = B,$$
$$\int_a^b g(x, y(x), y'(x))dx = l$$

の解ならば, $\bar{y}$ は $(\mathcal{P})$ の大域最小解である.

補足. 上記の $\tilde{f} = f + \lambda g$ を**ラグランジュ関数**と呼ぶ.

証明. 汎関数 $\tilde{J}$ を $\tilde{J}(y) = \int_a^b \tilde{f}[y(x)]dx$ とおくと, $\tilde{f}$ が凸なので, $\tilde{J}$ も凸関数になる. よって $\tilde{J}$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式の解 $\bar{y}$ は $u(a) = A, u(b) = B$ を満たす関数に対して,

$$\tilde{J}(u) \geq \tilde{J}(\bar{y})$$

を満たす．この不等式の両辺を計算すると

$$\tilde{J}(u) = \int_a^b \tilde{f}[u(x)]dx = J(u) + G(u) \geq \tilde{J}(\bar{y}) = J(\bar{y}) + G(\bar{y})$$

を得る．

ここで, 問題 $(\mathcal{P})$ の制約を満たす y を任意に取る．すると $y(a) = A, y(b) = B$ より, 上記の不等式を満たし, さらに $G(y) = l$ も満たすので, 不等式の両辺から $G(y) = G(\bar{y}) = l$ を引き, $J(y) \geq J(\bar{y})$ を得る．これは $\bar{y}$ が問題の大域最小解であることを表す． □

1.2 一般の汎関数に対する最適性必要条件

固定端変分問題と同様に, 一般の汎関数に対しても次の主張が言える．

定理 2. $\bar{y} \in C$ を問題 $(\mathcal{P})$ の局所最小解とする． すると, ある λ が存在して, $\tilde{f} = f + \lambda g$ に対するオイラー・ラグランジュの方程式を満たす．言い換えると,

$$\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[\bar{y}(x)] = \tilde{f}_y[\bar{y}(x)]$$

が成り立つ．

補足. オイラー・ラグランジュ方程式と制約を満たす関数を**停留関数**と呼ぶ．

証明．省略する． □

1.3 解法例

例 1.

$$\text{最小化 } J(y) := \int_0^1 y'(x)^2 dx$$
$$\text{制約 } G(y) := \int_0^1 y(x)dx = 1,\ y(0) = y(1) = 0$$

問題の停留関数を求める．目的関数と制約関数の被積分関数は $f(x,y,z) = z^2, g(x,y,z) = y$ なので, ラグランジュ関数はある定数 λ に体して, $\tilde{f} = z^2 + \lambda y$ となる． $\tilde{f}_z = 2z, \tilde{f}_y = \lambda$ なので, オイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{d}{dx}\tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)]$ は

$$\frac{d}{dx}\{2y'(x)\} = \lambda$$

となる．両辺を積分すると $2y'(x) = \lambda x + const.$ となるので, $y'(x) = \lambda/2x + c_1$ (c_1 は任意定数) を得る．さらに両辺を積分すると, オイラー・ラグランジュ方程式の解は

$$y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x + c_2$$

となることがわかる (c_2 は任意定数). ここで, $y(0) = 0$ より $c_2 = 0$, $y(1) = 0$ より $\lambda/4 + c_1 = 0$ 得る. さらに停留関数は制約 $\int_0^2 y(x)dx = 1$ を満たす必要があるので, $\lambda/12 + c_1/2 = 1$ を得る. 連立方程式を解くことにより, $\lambda = -24, c_1 = 6$ を得る. よって, 問題の停留関数は $y(x) = -6x^2 + 6x$ となる.

なお, $\lambda = -24$ に対して, ラグランジュ関数はに対して凸になっているので, 上記の停留関数は問題の大域最小解になる.