有限生成錐が閉集合になることについて

関口 良行（東京海洋大学）

1　有限生成錐

$\mathbb{R}^n$ のベクトルの有限集合 $S = \{a_i\}_{i \in I}$ に対して，

$$\operatorname{cone} S = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$$

を，S によって生成される錐と呼ぶ．I が有限集合のときは，特に有限生成錐と呼ぶ．有限生成錐に対して以下の定理が成り立つ．

定理 1. 有限生成錐は閉集合である．

この閉であるという性質は，線形不等式系の可解性に関する命題である，ファルカスの補題で利用される[1][2]．しかし，有限次元部分空間が閉であることと異なり，実は自明ではないのだが，自明であることのように取り違えられることがあまりに多い．しかも，きちんとした証明を載せている本が少ない[3]．それほど難しい証明ではないのだが，このノートに証明を書き留めることにした．

[1] 有限生成錐が閉集合であることがわかれば，後は分離定理を用いる．

[2] ファルカスの補題自体は，フーリエ–モツキンの消去法で直接示せる．

[3] 直接示しているものはない？

証明の失敗例

とりあえず素直に証明してみよう．$\mathbb{R}^n$ の有限集合 $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ に対して，$\operatorname{cone} S$ を考える．閉であることを示したいので，点列 $x_n \in \operatorname{cone} S$，$x_n \to x$ をとる．すると，

$$x_n = \lambda_1^{(n)} a_1 + \cdots + \lambda_k^{(n)} a_k, \quad \lambda_i^{(n)} \geq 0$$

と書ける．$\{x_n\}$ はコーシー列でもあるので，

$$\forall \epsilon,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_0,\ \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

ここで，

$$\|x_n - x_m\| = \|(\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(m)}) a_1 + \cdots + (\lambda_k^{(n)} - \lambda_k^{(m)}) a_k\|$$

が成り立つが，$\{a_1, \ldots, a_k\}$ は一次独立とは限らないので，$\{\lambda_i^{(n)}\}$ が収束するとは限らない．

別の方向を考えよう．有限次元なので，部分列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ に対して，

$$\frac{x_{n_j}}{\|x_{n_j}\|} \to y$$

とできる．しかし，証明が進まない．それでは，もう少し工夫して，

$$\frac{\lambda_i^{(n_j)}}{\sum_i \lambda_i^{(n_j)}} \to \lambda_i'$$

としよう．すると，

$$\frac{x_{n_j}}{\sum_i \lambda_i^{(n_j)}} \to \lambda_1' a_1 + \cdots + \lambda_k' a_k$$

とできるが，今度はもとの点列 $\{x_n\}$ とつながらなくなってしまう．

失敗例の問題点

上の証明はなぜ失敗したのだろうか？定理 1 は有限次元性が効いてくる性質だということは分かる．ここで，証明における有限次元性の使い方をまとめてみると，すぐに思いつくところで次のようなものがあるだろう[4]．

1. 有限個の基底を用いた表現を用いる
2. 有界閉集合のコンパクト性を用いる
3. 係数体の性質を用いる

定理 1 は，有限生成錐の位相的な性質を示すので，コンパクト性を使いたくなるが，実は有限個の基底表現を代数的に操作することによって得られる命題なのである．実際は大した代数操作ではないのだが，この方針の間違いは，証明する際に致命的なものになる．

ちなみに，有限次元部分空間が閉集合であることを示す際には，有限基底で表現できるということは用いるが，それをさらに代数的に変形することはない．そういった意味でこちらは自明なのである．

係数体について一言コメントを挙げておこう．ファルカスの補題をより一般化したタルスキ–ザイデンベルグの定理[5] が，係数体が実閉体[6] であれば成り立つ．ファルカスの補題，または有限生成錐が閉集合であることが，どのような係数体で成り立つのかという研究は，私は知らない．もし知っている人がいたら教えて欲しい．

[4] もちろん 1 から 2 はでるが，本質的に 2 の性質しか用いない証明も多い

[5] 歴史的には，こちらのほうが先かもしれない

[6] 実数体の他には，実代数的数，実係数ピュイズー級数体などがある．

2　正しい証明

証明には，言われればなるほどと感じる，次の補題が必要である．これは，位相的な性質とつながるように思えず，気付きにくい性質である一方で，今回の証明には不可欠なものである．

補題 2 (Carathéodory の定理の亜種)**．** $S = \{a_i\}_{i \in I}$ を $\mathbb{R}^N$ の有限集合とする．$\operatorname{cone} S$ は，S の一次独立部分集合 T によって生成される錐 $\operatorname{cone} T$ の和集合に等しい．

上の補題は，

$$\mathrm{cone}\, S = \bigcup \mathrm{cone}\{T \mid T \text{ は } S \text{ の一次独立部分集合}\}$$

が成り立つ，とも言い換えられる．

Proof. $\mathrm{cone}\, S \subset \bigcup \mathrm{cone}\{T \mid T \text{ は } S \text{ の一次独立部分集合}\}$ を示せば良い．$x \in \mathrm{cone}\, S$ とする．すると，

$$(*) \quad x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k, \quad \lambda_i > 0$$

と書ける．ここで $\lambda a_i = \mathbf{0}$ の項は省く．$a_1, \ldots, a_k$ が一次独立であれば，示すことはないので，一次従属であるとする．すると，

$$c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k = \mathbf{0}, \quad (c_1, \ldots, c_k) \neq (0, \ldots, 0)$$

かつ，少なくとも一つの $c_i > 0$ となる[7] $c_1, \ldots, c_k$ が存在する．ここで，

$$\mu = \max\{\mu' \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 - \mu' c_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k - \mu' c_k \geq 0\}$$

とする．すると，

$$x = (\lambda_1 - \mu c_1) a_1 + \cdots + (\lambda_k - \mu c_k) a_k, \quad \lambda_i - \mu c_i \geq 0$$

が成り立ち，少なくとも一つの係数が $\lambda_j - \mu c_j = 0$ を満たす．よって，x を正系数の一次結合で表すとき，$k-1$ 個以下の $\{a_i\}_J \subset \{a_i\}_I$ を用いて表すことが出来る．もし $\{a_i\}_J$ が一次従属ならば，上記の操作を有限回繰り返し，x を一次独立なベクトルの正系数による一次結合で表すことができる[8]．したがって x は，S のある一次独立部分集合 T によって生成される錐 $\mathrm{cone}\, T$ に含まれる． □

補題 3. $T = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}^N$ を一次独立とする．このとき， $\mathrm{cone}\, T$ は閉集合である[9]．

Proof. $\{x_n\} \subset \mathrm{cone}\, I$，$x_n \to x$ とする．$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$ とおくと，ある $\lambda_i^{(n)} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ が存在して，$\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_m^{(n)})$ に対して，

$$x_n = \lambda_1^{(n)} a_1 + \cdots + \lambda_m^{(n)} a_m = A\lambda^{(n)}$$

が成り立つ．ここで，両辺に A^T をかけ $A^T x_n = A^T A \lambda^n$ とする．いま，T の一次独立性より，$A^T A$ は正則であるので，

$$\lambda^{(n)} = (A^T A)^{-1} A^T x_n$$

が成り立つ．したがって，

$$\lambda^{(n)} = (A^T A)^{-1} A^T x_n \to (A^T A)^{-1} A^T x \quad (n \to \infty)$$

を得る．ここで，$\lambda = (A^T A)^{-1} A^T x$ とおくと，線形写像 A の連続性より，

$$x = \lim_{n \to \infty} A\lambda^{(n)} = A\lambda$$

が成り立つ．また，$\lambda_i^{(n)} \to \lambda_i$ より，$\lambda_i \geq 0$ なので，$x \in \mathrm{cone}\, T$ が成り立つ． □

[7] 直後の μ の有限性を保証する為に必要である．

[8] ベクトルが一個まで減れば，必ず一次独立である．

[9] 抽象論に慣れているひとは，$\mathrm{cone}\, T$ と $\mathbb{R}_+^m$ が同相であることより，としても良いが，以下のように直接示せる．

定理 1 の証明

Proof. 有限生成錐は，$\mathbb{R}^n$ の有限集合 $S = \{a_i\}_{i \in I}$ に対して，$\operatorname{cone} S$ と書ける．補題 3 より，$T \subset S$ が一次独立ならば，$\operatorname{cone} T$ は閉集合である．補題 2 より，$\operatorname{cone} S$ はそのような $\operatorname{cone} T$ の有限和集合である．閉集合の有限和集合は閉集合なので，$\operatorname{cone} S$ は閉集合である． $\square$