§１　線形、運動方程式の線形化

１－１　線形システムの概念

線形について、これまで線形代数のところでその名前を聞いたと思う。線形性は物理システムの入出力（因果関係）の関係が１次関数で表せるものを指す。

例１－１：線形関係

　１）力と長さの関係　　２）一定速度で走る車の時間と距離の関係

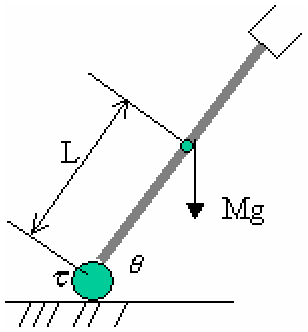
　３）モータに加える電圧とモータの回転速度

例１－２：非線形システム：

1）ボールが自由落下のとき、時間と距離の関係、

２）バルブの回転角度と弁開度　、３）が延びきったあとの力の変位の関係

４）垂直面内で動くロボットアームの角度と重力の関係



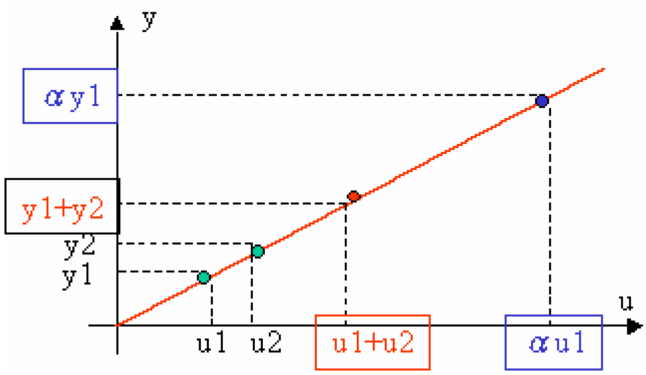
$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta} = T - mgL\sin(\theta)$$

では、システムが線形であることを定義するとき、どのような言葉になるか。

・**線形システム：**　入力信号（u(t)）と出力信号 y(t)= $y(t) = \phi(x(t))$ の間に以下の関係が成立するとき、システムが線形であると定義する。

$\phi(au(t)) = a\phi(u)$　（入力 $au\ (t)$ ―――＞　出力 $ay(t)$）

$\phi[u_1 + u_2] = \phi(u_1) + \phi(u_2)$（入力 $\alpha u_1 + \beta u_2$　=>　出力 $\alpha y_1 + \beta y_2$）



・線形システムの判断：

A.　定義による直接判断（実用的ではない）

B.　ｙとｕに関する運動方程式の中で、各要素ごとに全部１次のものであれば線形である。

例１－３　線形関係：　$y = 3u$　，　$y(t) = \int u(t)dt$　，　$y(t) = a\dfrac{du}{dt}$

$\dot{y} + 3y = 5u$

非線形関係：　$y = 3u^2$、$y = xy$、　$y = tx$、　$\ddot{\theta} + 4.5\sin(\theta) = u$）

$\ddot{\theta} + 3\dot{\theta}\theta + 2\theta = u$

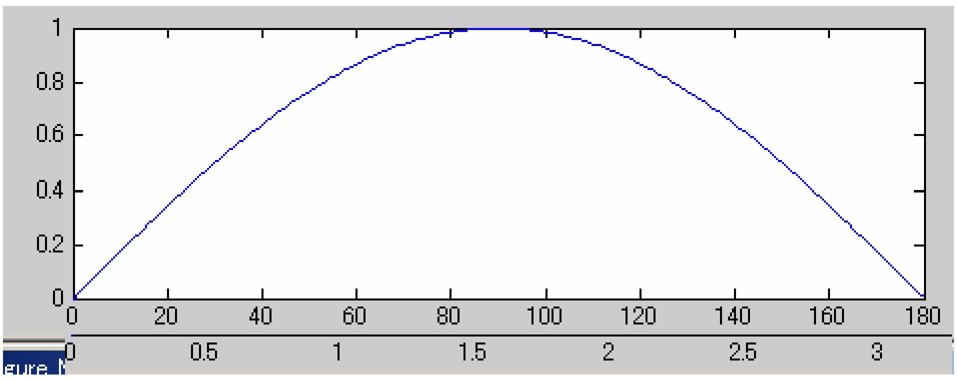
C.　**グラフによる判断**：直線のグラフは線形性を表す。
曲線は非線形性

自然界のシステムにおいて、巨視的に見ると非線形的なものが多い。しかし、ある範囲において、線形と見てもいい場合も沢山あります。従って、線形性質を示す部分の近くでは、システムを線形と見なしてもよい。このとき、システムの運動方程式は線形関数で近似することが良く行われる。これはいわゆる非線形方程式の線形化ということである。

１－２　線形化

線形化ということは、線形と見なせるところの特性を線形関数で書き直すことである。よって，線形化を行うときは、必ず特定な点の近傍で線形化をはっきり言わなければならない。すべての領域で線形化することはほぼ不可能である。

グラフ上では、非線形は曲線部分で,線形化はその曲線を接線で表すことに対応する。例えば$\sin(\theta)$が$\theta = 0$、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ =1.04rad=60゜、$\theta = \frac{\pi}{2}$ =1.57rad=90゜のそれぞれの点のところで、接線が違うので,線形近似するときの関数も違う。



・線形近似表現法：

線形関数 $y=f(x)$ を、$x=x_0$ 点の近傍で線形近似した形は以下となる 。

$$y=f(x_0)+K(x-x_0)、\quad ただし \quad K=\frac{d}{dx}f(x_0)$$

では、 $y=\sin(\theta)$ について考える。

１） $\theta=0$ の点での線形近似： $y=\sin(0)+\cos(0).(\theta-0)=\theta$

２） $\theta=\frac{1}{3}\pi=1.04$ の点での線形近似： $y=\sin(\frac{1}{3}\pi)+\cos(\frac{1}{3}\pi).(\theta-\frac{1}{3}\pi)$
$=0.866+0.5(\theta-1.04)$

３） $\theta=\frac{1}{2}\pi=1.57$ の点での線形近似： $y=\sin(\frac{1}{2}\pi)+\cos(\frac{1}{2}\pi).(\theta-\frac{1}{2}\pi)$
$=1+0(\theta-1.57)=0$

例１－４：運動方程式 $J\ddot{\theta}(t)+b\dot{\theta}=T-mgL\sin(\theta)$ を、$\theta=0$ と $\theta=\frac{1}{3}\pi$ の近傍で線形近似せよ。

解：$\theta=0$ での線形近似方程式は $J\ddot{\theta}(t)+b\dot{\theta}=T-mgL\theta$

$\theta=\frac{1}{3}\pi$ での線形近似方程式は $J\ddot{\theta}(t)+b\dot{\theta}=T-mgL(0.866+0.5(\theta-1.04)$

演習：１．以下の運動方程式の線形性を判断せよ。

$\ddot{y}(t)+2y\dot{y}+y(t)=u$、 $y(t)=2t;$ 、 $y(t)=t^2$ 、 $y(t)=|t|$

２．運動方程式 $A\frac{dh}{dt}=u-c,\quad c=k\sqrt{h}$ を、$h=h_0$ 点の近傍で近似せよ。