§３　システムの安定性と安定化

§３－１安定性

安定性の定義は制御工学１と同じである。
正常運転（平衡状態にある）システムにおいて
「瞬時的な外乱を与えたとき、時間の経過につれて系が再び平衡状態に落ちつけば安定であるといい、これに対して系が平衡点からますます離れていくとき不安定であるという。」

状態方程式で表されるシステムの安定性はどのように判断すればよいか？

伝達関数で表す場合は、伝達関数のすべての極が正（複素数の場合は、実部が正）であれば安定であるという判断方法である。これに対して、状態方程式が

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

与えられたとき、システムが安定であるための条件は以下となる。

行列Ａのすべての固有値が負（複素数の場合は、実部が負）であれば、システムが安定である。

状態方程式から伝達関数へ書き換えの式は　$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ であることから、Ａの固有値＝伝達関数の極　であることが分かる。

例３－１：　状態方程式 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} f$、　$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$、　の安定性を判断せよ。

解：　この状態方程式のＡ行列は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ である。計算により、Ａ行列に固有値は－１、－２であり、安定である。
（このシステムの伝達関数は

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix})^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

極はー１、－２である）

§３－２　状態フィードバック制御によるシステムの安定化

制御対象
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

の状態変数ベクトルｘのすべての要素が測定できる場合、制御側を

$$u = v - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots k_n x_x) = v - Kx$$

の形をとるとき、状態フィードバック制御という。これによって、閉ループシステムの状態方程式は

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$
$$y = Cx + Du$$

となる。入出力の関係式の「Ａ」行列が$(A - BK)$に変わったことで、設計目的を達成する。

状態フィードバック制御の目的：　システムを安定化、
システムの応答を改善する、
システムを最適化

目的を満たすように、フィードバックゲイン（ベクトル）Ｋを求めるのが、制御設計の仕事である。

安定化方法１：　極（固有値）配置

状態フィードバック制御ｕを加えた後のシステムの状態方程式

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$
$$y = Cx + Du$$

の「A」行列に当たる（A-BK）がシステムの安定性を左右するので、予め行列（A-BK）の固有値を安定範囲の値に指定し、これに対応するベクトル K を計算する方法を極（固有値）配置という。

例３－２　状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & +3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u、\qquad y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対して、状態フィードバック制御を$u = Kx = [k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$とする。閉ループシステムの固有値が　-5、-7となるように、ゲインベクトルＫを求めよ。

解：　閉ループシステムの状態方程式は

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & +3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & +3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix})\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2-5k_1 & 3-5k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

行列$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2-5k_1 & 3-5k_2\end{bmatrix}$の固有値をλとすると、λは以下の式を満たす。

$$\det(\lambda I-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2-5k_1 & 3-5k_2\end{bmatrix})=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -(-2-5k_1) & \lambda-(3-5k_2)\end{bmatrix}=0$$

つまり　　$\lambda(\lambda-(3-5k_2))-(-2-5k_1)=\lambda^2-(3-5k_2)\lambda+(2+5k_1)=0$。

一方　閉ループの固有値が－５、－７となるために、λは同時に以下の式を満たす。

$$(\lambda+5)(\lambda+7)=0 \implies \lambda^2+12\lambda+35=0$$

λに関する２２式の係数を比較して、

$$k_1=\frac{33}{5}\ ,\ k_2=3$$

を得る。

演習問題：

１．状態方程式 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}u$、 $y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ について答えよ。

A)　A 行列の固有値 λ_1、λ_2 と対応する固有ベクトル t_1 と t_2 を求めよ。
固有ベクトル t_1 と t_2 を用いて、行列 $T=\begin{bmatrix}t_1 & t_2\end{bmatrix}$ を定義する。

B)　新しい状態ベクトル $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$
のように定義し、もとの状態方程式を状態ベクトル $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$ を用いて書き換えよ。

C)　状態ベクトルが変わっても、伝達関数が変わらないことを示せ。

２．状態方程式 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}u$、 $y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$
に対して,閉ループシステムの固有値がー２、－３となるように、
状態フィードバック $u=Kx=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ のゲインベクトル $\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$
を求めよ。

制御工学Ⅱ　資料　2006.12.6

Matlab　による制御システムのシミュレーション

制御工学に特有なシステム表現法：　伝達関数と状態方程式をもちいて、Matlab でシステムの時間応答を計算することができる。

1. Matlab 関数を用いたシミュレーション

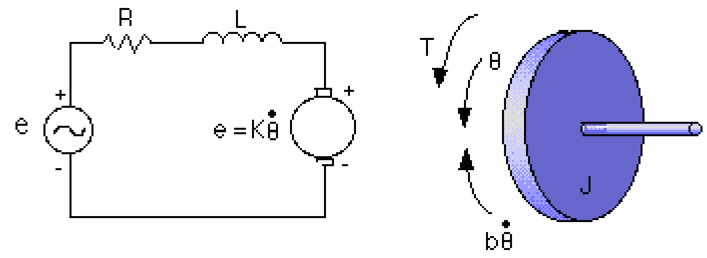
伝達関数を記述するための Matlab 関数は tf　である。

状態方程式を記述するための Matlab 関数は ss　である。

Matlab でシステムを入力し、極、ステップ応答及びボード線図を求める方法:

システム A　： $\dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{1}{s^2+5s+2}$	システム　B: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
>> P1=tf([1], [1 5　2]);　%システムを P1 として入力する	>> A=[0　1; -1 -3]; B=[0 ; 1]; C=[1　1];D=0; >>Pb=ss(A,B,C,D);　%システム Pb として入力
>>ploe(Pa)　% Pa の極を求める	>>ploe(Pa)　% Pa の極を求める
>> step(Pa)　%Pa のステップ応答	>> step(Pa)　%Pa のステップ応答
>> bode(Pa)　%Pa のボード線図	>> bode(Pa)　%Pa のボード線図
システム A を状態方程式に書き換え、Pa2 とする >> Pa2=ss(Pa);	システム B を伝達関数に書き換え、Pb2 とする >> Pb2=tf(Pb);

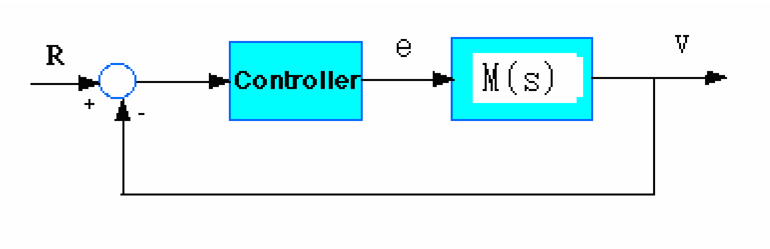
演習１: C モーターのシミュレーションを行う。



DC モータの動作原理から、駆動電圧 e から、回転速度 $v(=\dot{\theta})$ までの伝達関数は以下となる

$$M(s) = \frac{v(s)}{e(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} = \frac{K}{JLs^2+(bL+JR)s+(K^2+bR)}$$

速度制御システムを以下のように構成する：



既知パラメータ：

$J=0.01;\quad b=0.1;\quad K=0.01;\quad R=1;\quad L=0.5;$

設計要求：

整定タイム（Setting time）< 2s
オーバーシュット（Overshoot）＜5%
定常誤差（Steady-stage error）＜１%

求め：

1. モータの伝達関数 M(s)を Matlab 関数で表現する
2. control がない場合、モータのステップ応答を求めよ
3. 以上の要求をみたすように、PID コントローラ $C(s)=K_p+\frac{Ki}{s}+K_d s$ を試行錯誤的に決める：
   3.1 Kp＝100、Ki=Kd=0 のとき、閉ループのステップ応答を求め、設計結果と比較する。
   3.2 Kp＝100、Ki=Kd=１のとき、結果を設計要求と比較する
   3.3 Kp＝100、Ki=200, Kd=１のとき、結果を設計要求と比較する

2． simulink tool box を用いたシミュレーション

2.1 simulink tool box の起動

\>> simulink (或いは、Matlab ウェンドウ上方のをクリックする)
(これによって、simulink Library Browser ウェンドウが開く)

2.2 simulink Library Browser を用いて、simulink プログラムの構築と実行

新しいプログラムを書くために、simulink Library Browser から、ファイルーー＞新規——＞モデルで新しい作業ウェンドウを開き、そこでブロック図（プログラム）を書く。

シミュレーション手順：

① ブロック図によるシステムの記述

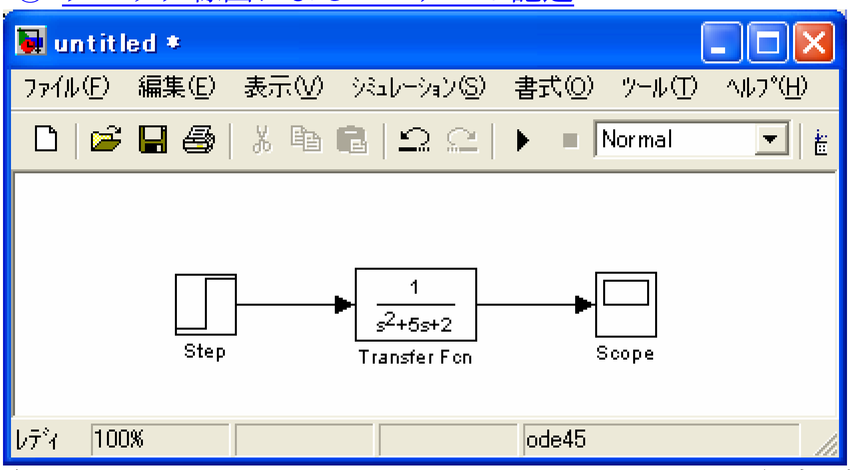
② シミュレーション条件の設定
[シミュレーション] →[パラメータ] →[ソルバ]

③ シミュレーションの実行
[シミュレーション]→ [開始]

練習： 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 2x = u(t)$ に対して、$u(t)$ がステップ信号のときの出力応答 $x(t)$ のグラフを求めよ

計算法１）上式のから伝達関数を求める。$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 2}$

① ブロック線図によるシステムの記述



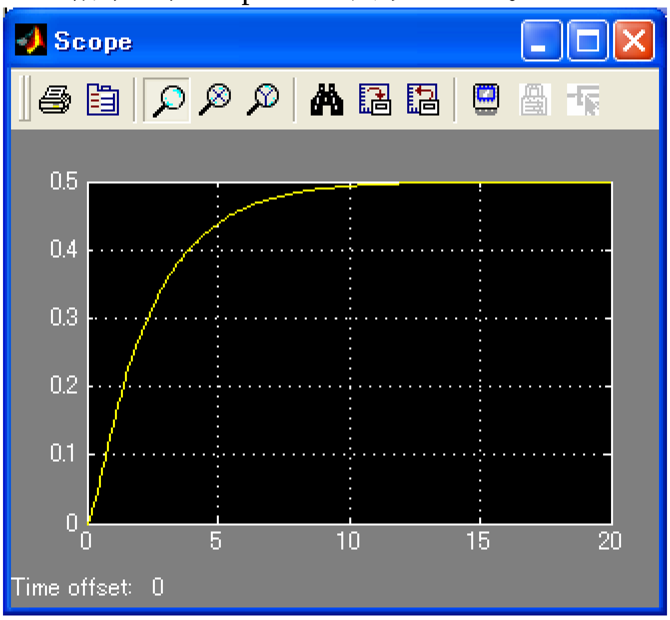
（ここで、Transfer fcn ブロックをクリックし、記入したい伝達関数の分子、分母の係数ベクトルを書き込む）

②　シミュレーション条件の設定（例）

シミュレーション期間	：	0.0 秒～20 秒
時間刻み	：	一定
数値計算法	：	ロング・クッタ法
サンプリング周期	：	0.1 秒

③ シミュレーションの実行

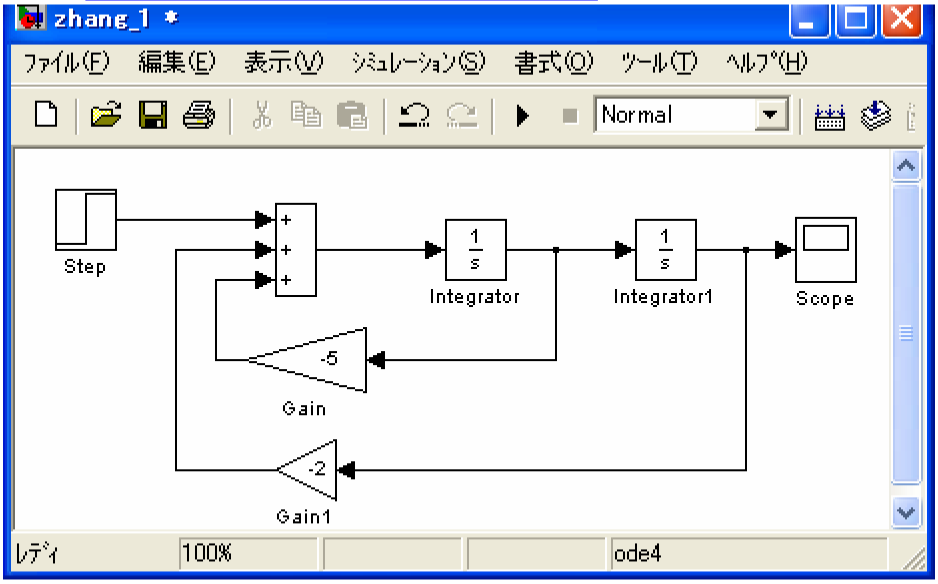
実行した結果は、scope から表示される。



計算法２）方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+2x=u(t)$ を以下のように書き換える。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-5\frac{dx}{dt}-2x+u(t)$$
（最高次の微分項を書く出す）

①　ブロック線図によるシステムの記述



②、③は計算法１と同じように実行する。出力応答グラフを比較してみよう。

★　計算法２）は、非線形の微分方程式を解くために便利である。

演習問題：

１）　微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+x=\sin(2\pi\quad t)$，$\dfrac{dx(0)}{dt}=x(0)=0$ の解 $x(t)$ のグラフを求めよ。