§４　制御システムの可制御性と可観測性

　これまで、制御工学で題材としてきたシステムのほとんどは、入力を与えると物理的に反応があり、結果が検出できることになっていました。しかし、一般的なシステムを考えた場合、必ずしも制御できるとは限りませんし、対象の状態が必ずしも見えるとは限りません。また、一見すると、直接的には操作、観察できない状態であっても、間接的に操作、観察ができるかもしれません。
　状態方程式によってシステムの入出力員か関係を示すだけでなく、システムの内在関係も示すこととなる。そこから、直接制御できなくても、関節的に制御できない系もわかる。

４－１　座標変換

１入力１出力システム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \qquad （４－１）$$

に対して、新しい状態ベクトル　z を

$$x = Tx \quad 、T は正則 \qquad （４－２）$$

で定義する。このとき、上の状態方程式を

$$\dot{z} = \overline{A}z + \overline{B}u$$
$$y = \overline{C}z \qquad （４－３）$$

で表す。このとき、

$$\overline{A} = T^{-1}AT, \qquad \overline{B} = T^{-1}B, \qquad \overline{C} = CT \qquad （４－４）$$

である。このとき、(4-3)式は（４－１）を座標変換後の式とい、T は座標変換行列という。

「座標変換の性質」　システムの固有値は変わらない。

確認：
$$\left|\lambda I - \overline{A}\right| = \left|\lambda I - T^{-1}AT\right| = \left|T^{-1}\lambda IT - T^{-1}AT\right| = \left|(T^{-1})(\lambda I - A)(T)\right|$$
$$= \left|T^{-1}\right|\left|\lambda I - A\right|\left|T\right| = \left|\lambda I - A\right|$$

４－２　対角形式

　行列 A の固有値　$\lambda_1,\ \lambda_2 \cdots, \lambda_n$　があり、対応する固有ベクトルを $t_1,\ t_2 \cdots, t_n$ とする。いま、座標変換行列　T　を

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$$

とする。このとき、

$$\overline{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

のような対角行列となる。$\overline{B}$,　$\overline{C}$ は特に特別な形はありません。

例４．１　：次のシステムの対角形式を求めよ。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u、 y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad （４－５）$$

解：固有値をけいさんすると、$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$

固有ベクトル　t_1 は以下の式を満たす

$$\{\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\} t_1 = 0 \quad ==> \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} t_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = 0$$

$p_1 + q_1 = 0$、　一つの解として、　$p_1 = 1$、$q_1 = -1$

$t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$　、　同様に、　$t_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$　が求められる。

変換行列 T は

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad 、 \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

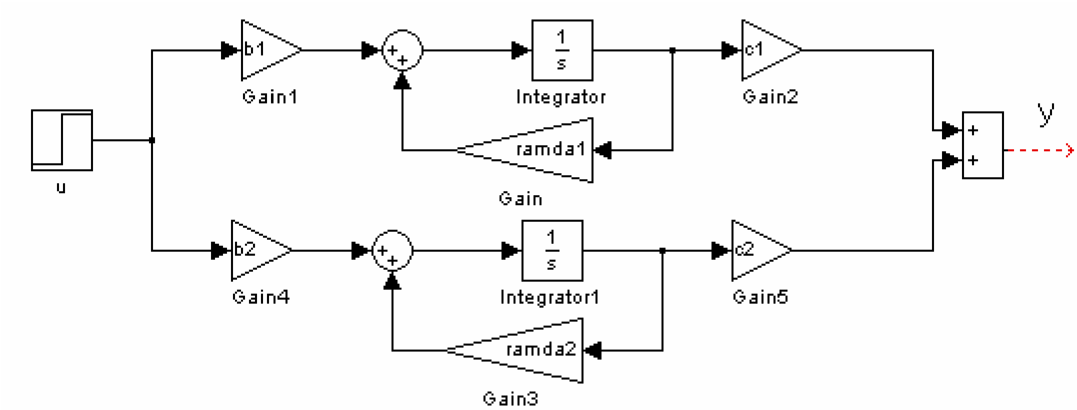
$$\overline{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}、\overline{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u、 y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad （４－６）$$

４－３　可制御性

対角形式（４－６）をブロックで表示するとき、以下となる



すべてのモードが入力 u と出力 y とゼロでない関係で繋がっているかどうかは制御設計において重要である。

「可制御の定義１：」

あるシステムを対角形式で表現したとき、$\bar{B}$ 行列のすべての要素がゼロでないとき、システムが可制御であるという

「可制御の定義２：」

任意の初期状態 x_0 と終端状態 x_T が与えられたとき、有限時間 T において、状態 x_0 から x_T へ移すような制御入力 u が存在するなら、システムが可制御であるという。

可制御の定理：　システムが可制御であるための必要十分条件は

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

（証明）章の付録を参照

例４．２　以下のシステムの可制御性を判断せよ（例４．１と同じ）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u、\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解：　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad ==> \quad rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

よって、システムは可制御である。

例：舵による減揺

２自由度倒立振り子

＊　可制御なシステムはすべての固有値を配置できる。

４－４　可観測性

「可制御の定義：」

ある有限時間 T があり、$0 \le t \le T$ の間の出力 y(t)と入力 u(t)から、初期状態 x(0)を一意に決定できるとき、システムは可観測である。

可制御性の判別：　$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

＊　可観測なシステムは、内部状態の推定ができる。

＊　可制御、可観測のシステムは、伝達関数に変換するとき、分母多項式の最大次数が状態の次数と同じである。

演習：

１、$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} x(t)$　　の可制御性と可観測性を調べよ。

２．以下のシステムを考えよ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

A)　システムの極を調べよ

B)可制御性を調べよ

C)システムの極を　－２、－１＋ｊ、－１－ｊにする状態フィードバック $u = -Kx$ を求めよ。