講義５　状態観測

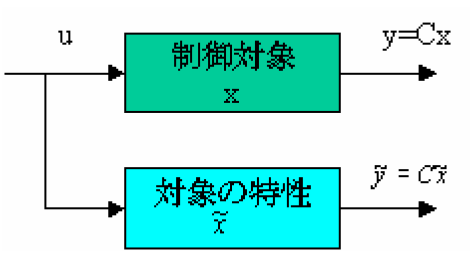
システムの状態方程式が $\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$ と書かれたとき、物理的に測定できるのがｙです。しかし、これまでの状態フィードバック制御を行うためには、計測できない状態のすべても分かる必要があります。従って、内部状態を推定しようとするのが当然の考え方です。制御理論では、この内部状態（つまり状態ベクトル）を推定するための方法がすでにまとまっているので、これを紹介します。

状態推定の目的は、状態ベクトルのすべての要素の値が求まることから、推定に関しては、

　１）　全状態推定
　２）　部分状態推定

に分けられる。前者は言葉のとおり、状態ベクトルのすべての要素の値を推定によっと求める。後者は、一部だけを求めることです、なぜなら、折角出力 y が物理的に測定できるので、その中に含まれていない状態だけを推定すればよい。

まず、推定に関する考え方を説明します。一番簡単なのが、システムのコピーをコンピュータ内で作ります（つまりシミュレーション）。或いは、同じ特性を別な物理システムを作って、その状態を測定することで、対象の状態と見なす。ブロック線図で表すと



しかし、問題がひとつあります。
問題：　初期値も非可観測なので、同じ状態で稼動できない。
結局、$\hat{x}$ がｘに漸近することは保障できないケースが出ます。どのようなケースが旨くいくか？どのようなケースが旨くいかないか？

　制御対象の状態方程式：$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

　観測器（推定演算）：　$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$

とする。また、$e = x - \hat{x}$　とする。このとき、$e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0$ に注意。

e が満たす方程式は　$\dot{e} = Ae$　となることが確かめられる。よって、
A が安定な行列、即ち制御対象が安定なら、―――＞　$e(\infty) = 0$
A が不安定な行列、即ち制御対象が不安定なら、―――＞$e(\infty) \to \infty$、推定不能
これを頭にいれて、これからの説明を聞きましょう。

５－１　全状態推定（観測）

問題：　システム $\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$ に対して、状態ベクトル x の推定値を $\hat{x}$ とし、$\hat{x}$ を求めよ。

解：　$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x}) \\ y_{\hat{x}} &= C\hat{x}\end{aligned}$　とする、但し L は設計するものです。

よって、推定誤差を　$e = x - \hat{x}$　とすると、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})) \\ &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e\end{aligned}$$

これは、誤差ベクトル e に関する状態方程式で、e の初期値はゼロでないが、時間と共に e がゼロに収束するためには、A－LC の固有値が安定であるように L を設計すればよい。

例５－１　制御対象 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 3 \\ -6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u(t)$、　$y(t) = \begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$ に対して、
状態推定サブシステムを構成せよ、ただし、サブシステムの固有値を $-10 \pm j$ とする。

解：　$A = \begin{bmatrix}-4 & 3 \\ -6 & 5\end{bmatrix}$、　$C = \begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}$ であり、$A - LC$ の固有地が $-10 \pm j$ とようなベクトル L を求めると、

$$L = \begin{bmatrix}l_1 \\ l_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}34.6667 \\ 83.0\end{bmatrix}$$

よって、状態推定サブシステムは以下となる

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}34.6667\\ 83.0\end{bmatrix}(y(t)-\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix})$$

さて、上の式は状態 x(t)を推定するためのシステムで、このシステムを作る必要がある。教科書にしばしばこれを状態観測器と呼んでいる。コンピュータ制御の場合、状態推定式を数値的に解くことで、状態の推定値 $\hat{x}(t)$ を求めることができる。求めからは、差分方程式に書き直し、ステップ（サンプリングごとに解くこととなっています）

５－２　併合系

状態推定サブシステムによって再現した状態を用いてフィードバック制御系を構成するときの閉ループシステムの特性について考え読みよう。

制御対象は可制御かつ可観測で、

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx$$

で記述されている。状態フィードバック制御に必要な状態 $x(t)$ は直接測定できないので、推定値 $\hat{x}(t)$ を使う。即ち

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+L(Cx-C\hat{x})=(A-LC)\hat{x}+Ly(t)+B(u)$$

$$u(t)=-K\hat{x}(t)$$

とすると、閉ループ系の運動方程式は

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & -BK\\ LC & A-LC-BK\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \hat{x}\end{bmatrix}$$

となる。

この方程式の安定性を調べてみよう。まずは例で計算しよう。

例５－２　制御対象 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ -6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$、 $y(t)=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ に対して、

１）状態フィードバック $u(t)=-Kx=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ を、$(A-BK)$ の固有値が-2,-5 となるように、K を求める。

２）問題５－１と同じ。

解：　K=[-6.3333　9.0]

$$L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34.6667\\ 83.0\end{bmatrix}$$

合併した計の A 行列は

$$\begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 6.333 & -9.0 \\ 104 & -34.6667 & -108.0 & 37.6667 \\ 249.0 & -83.0 & -248.6667 & 79.0 \end{bmatrix}$$

この行列の固有値は　　であるので、システムは安定です。

さて、一般式で判断するためには、「A」行列が複雑であるため、状態変換を行って、分かりやすい形にする。新しい状態ベクトルを以下のように定義する。

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} ===> \quad \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

新しい状態ベクトルによるシステムの状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ A-BK & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix}$$

よって、システムの安定性は A-BK と A-LC の固有値で決まる。即ち、システムを安定化するためのフィードバックゲインと安定な状態推定サブシステムを別々に設計することで、合併したシステムの安定性も保証される

演習問題：　２次の制御対象

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)、 \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

について答えよ。

１）状態フィードバック $u(t) = -Kx = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ を、$(A-BK)$ の固有値が-2,-5 となるように、K を求める。

２）状態推定サブシステムを構成せよ、ただし、サブシステムの固有値を $-10 \pm j$ とする。