

講義 6 サーボシステムの設計

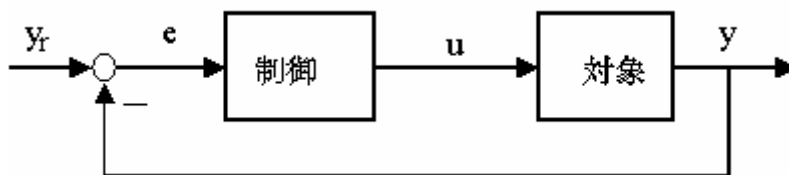
前章までは、状態フィードバック制御と状態推定の話をしました。これによって、制御システムの構成がほぼ完成できる。状態フィードバック制御の結果は、すべての状態 x が最終的にゼロに収束する結果となる。このようなケースはどういった場合に使うか。

例えば

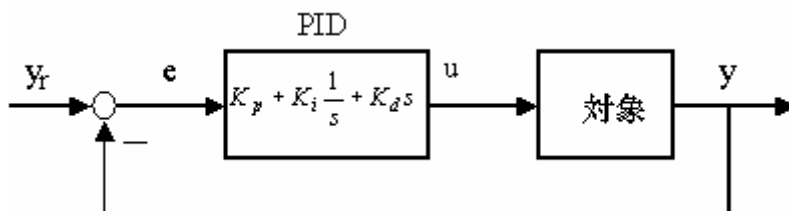
- 1、車の振動を制御するシステム、
- 2、ロボットアームなら、目的の位置を座標系の原点として運動方程式を立てると、システムが最終的に原点（ゼロ）に収束することは、即ち目的とする姿勢にさせることができる。

しかし、制御の目的は、目的信号が随時変更する場合があります。即ち、状態をゼロに収束するのではなく、出力をある値に追従するようなシステムを設計することが要求される。

この場合に、制御システムのブロック図は、

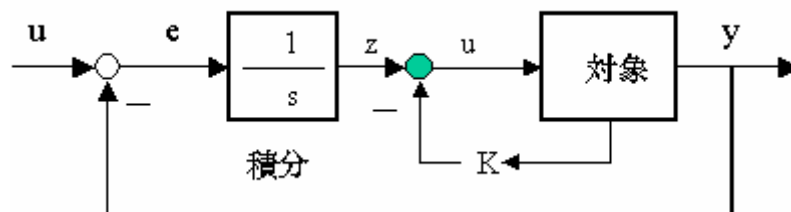


と表現できる。実際、制御工学の場合、PID 制御を説明するとき、これと似たブロック図をよく描きました。



両者の違いは、制御入力 u の計算則の違いにあります。

PID のところで紹介したことを思い出してください。出力を目的値に追従するためには、積分演算を使う必要である。ここでも、この原理を使って、状態フィードバックと積分の組み合わせで制御入力を構成する。具体的には下図の構造となる。



これはいわゆるサーボ系の構造である。

そこから、 u の計算式が導出される：

$$\begin{aligned} u &= -Kx + Pz \\ \dot{z} &= -Cx + Y_r \end{aligned}$$

パラメータ K と P をどのように設計するかを見るために、全システムの運動方程式を書く。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ \dot{z} &= Y_r - y(t) \\ u &= -Kx + Pz \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{拡大系:} \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ u &= -\begin{bmatrix} K & -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow$$

拡大系の一般形を以下のように記述する

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$u = -\bar{K}\bar{x}$$

ただし、 $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{K} = \begin{bmatrix} K & -F \end{bmatrix}$,

もし、拡大した系が可制御なら、閉ループ系を安定化フィードバックゲイン $\begin{bmatrix} K & -F \end{bmatrix}$ が設計できる。

拡大系の可制御性条件チェック：

拡大系の \bar{A} , \bar{B} を用いて、可制御性を調べる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{n+m-1}\bar{B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n+m-1}B \\ 0 & -CB & -CAB & \dots & -CA^{n+m-2}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{n+m-2}B \\ I_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式の 2 番目の行列のランクは full ランクである。したがって、拡大系が可制御であるための条件は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = m + n$$

である。

可制御条件が満たすなら、フィードバックゲインが求められる。

問題：

以下のブロック図で表すサーボシステムにおいて、

- 1) 制御信号 u を求めるための式を書け。
- 2) このシステムは、ステップ入力に対して、定常誤差が無いことを示せ。

