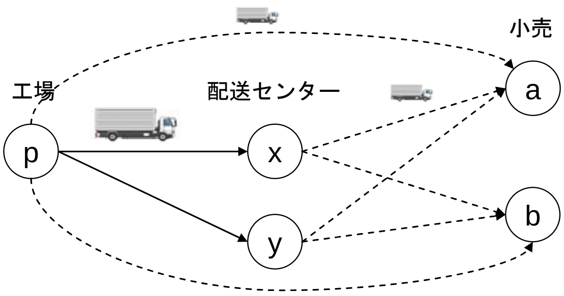
定式化の練習（施設配置問題の一例）

第２回ロジスティクス勉強会の続き

工場から小売に商品を配送する場合を例に、配送センターの立地に関する検討を行う。



【目的関数】

まず、リンクの集合を用いて個々の幹線輸送費用と配送費用を表すと次のようになる。

$$c1 \cdot x_l \cdot d_l, \quad l \in L1$$

$$c2 \cdot x_l \cdot d_l, \quad l \in L2$$

$$L1 = \{px, py\}, \quad L2 = \{pa, pb, xa, xb, ya, yb\}$$

したがって、Σを用いてリンクの費用の合計を表すと次のようになる。

$$\sum_{l \in L1} c1 \cdot x_l \cdot d_l + \sum_{l \in L2} c2 \cdot x_l \cdot d_l \text{ -- 式(1)}$$

次に、ノードの費用を同様に表すと次のようになる。

【考えてみよう。】（固定費用を含めない場合）

入出庫費用から考えてみる。まず、ある配送センター(i)における入出庫費用は、入庫量と出庫量の合計に単価を掛ければよいので次のようになる。

$$c3_i \cdot \left(\sum_{l \in IN_i} x_l + \sum_{l \in OUT_i} x_l \right)$$

ここで、IN_iは配送センター(i)に入ってくる輸送リンクの集合で、OUT_iは配送センター(i)から出て行く輸送リンクの集合である。

したがって、配送センターの集合をNCとすると、入出庫費用と保管費用は、次のように表すことができる。

$$\sum_{i \in NC} \left(c3_i \cdot \left(\sum_{l \in IN_i} x_l + \sum_{l \in OUT_i} x_l \right) + c4_i \cdot \sum_{l \in OUT_i} x_l \cdot ST \right) \text{ ---------------------------- 式(2)}$$

したがって、目的関数は、次のように表現できる。

【考えてみよう。】

式(1)と式(2)の合計が、目的関数となる。

【制約条件】

ステップ 3：制約条件を考える。

　制約条件は、問題の構成要素に分けて考えると考えやすい。この問題では、ノードとリンクに分けられる。

・ノード

　ノードは更に工場、配送センター、そして、小売の 3 つの要素から構成されている。そこで、要素毎に考えていく。

　工場：生産量（工場から輸送される輸送量)、・・・

　配送センター：保管量、取扱量、・・・

　小売：需要量（小売に配送される輸送量)、・・・

　ここで、実績データから得られる工場の生産量と小売の需要量をもとに制約式を記述すると次のようになる。

$$P_i \geq \sum_{l \in OUT_i} x_l, \quad i \in NP$$

$$D_i \leq \sum_{l \in IN_i} x_l, \quad i \in NS$$

$$NP = \{p\}, \quad OUT_p = \{pa, pb, px, py\},$$

$$NS = \{a, b\}, \quad IN_a = \{pa, xa, ya\}, \quad IN_b = \{pb, xb, yb\}$$

　以上のことからノードに入ってくる量と出て行く量を確認する必要があることが分かる。したがって、両方を考えなければいけない配送センターでは、上記の保管量等以外に次の制約が必要となる。

　　　　【考えてみよう。】

輸送を水の流れとして考えてみると分かりやすい。あるノードに入る水の量と出ていく水の量は、どのような関係になっていなければならないか？

$$\sum_{l \in IN_i} x_l = \sum_{l \in OUT_i} x_l, \quad i \in NC$$

・リンク

　配送等では、配送時間を考慮する必要があるので、輸送距離に関して配送エリアの広さを参考に上限を定めることがある。例えば、予めリンクの集合から上限を超えたリンクを削除しておくことが考えられる。

　また、トラックの最大積載量のような輸送量の上限を設けることもある。

・その他

　最後に、輸送量の非負条件を忘れないようにしよう。

$$x_l \geq 0, \quad l \in L$$

$$L = \{pa, pb, px, py, xa, xb, ya, yb\}$$

以上の定式化により、配送センターの固定費用を除いた場合の定式化が完成した。

ステップ 4：配送センターの固定費用を考慮した場合について考える。

配送センターの使用の可否を検討するためには固定費用を考慮に入れる必要がある。この場合、配送センターの使用の有無を表す 0, 1 の値をとる変数を使用する。

固定費用の定式化から考えていこう。

【考えてみよう。】

使用する配送センターを 1、使用しない配送センターを 0 とする変数(y)を使用し、この変数を各配送センターの固定費用に掛けて求めると合計の固定費用を求めることができる。

$$\sum_{i \in NC} C5_i \cdot y_i$$

次に、制約条件について考えてみよう。配送センターを使用しない場合、IN と OUT のリンクの輸送量は、0 でなければならない。これをどのように表現すればよいのであろうか？

【考えてみよう。】

配送センターへの入庫及び出庫の輸送リンクの集合を下記のように表現する。

$$L3_i = IN_i \cup OUT_i \ , \quad i \in NC$$

$$M \cdot y_i \geq x_l \ , \quad l \in L3_i, i \in NC$$

ここで、M は輸送量の上限又は非常に大きな値である。

ステップ 5：配送センターの規模について考えてみよう。

配送センターの固定費用は、通常、施設の規模によって決まる。あるいは、借用する広さによって決まる。そこで、適切な規模を求めてムダな費用を節減するためは、どのように定式化を工夫すればよいか考えてみよう。

【考えてみよう。】

例えば、同じ場所に規模の異なる配送センターがあるとして定式化をすればよい。
その際、この規模の異なる配送センターは、いずれか一つしか使用できないので、配送センターの使用を表す変数(y)の合計を 1 以下とする制約条件を追加すればよい。

定式化が終われば、次の作業を実行する。

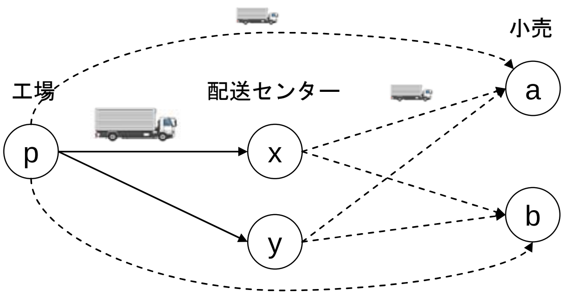
【glpk 等で定式化を表現する。】

【データを作成し、最適解を求める。】

以上

定式化のまとめ（配送センターの固定費用を除いた場合）

工場から小売に商品を配送する場合を例に、配送センターの立地に関する検討を行う。



【目的関数】

$$\min.\quad Total\_Cost = \sum_{l \in L1} c1 \cdot x_l \cdot d_l + \sum_{l \in L2} c2 \cdot x_l \cdot d_l + \sum_{i \in NC} \left(c3_i \cdot \left(\sum_{l \in IN_i} x_l + \sum_{l \in OUT_i} x_l \right) + c4_i \cdot \sum_{l \in OUT_i} x_l \cdot ST \right)$$

【制約条件】

$$P_i \geq \sum_{l \in OUT_i} x_l, \quad i \in NP$$

$$D_i \leq \sum_{l \in IN_i} x_l, \quad i \in NS$$

$$\sum_{l \in IN_i} x_l = \sum_{l \in OUT_i} x_l, \quad i \in NC$$

$$x_l \geq 0, \quad l \in L$$

上記の図の場合の各集合の要素

$$NP = \{p\}, \quad NS = \{a, b\}, \quad NC = \{x, y\}$$
$$L = \{pa, pb, px, py, xa, xb, ya, yb\}$$
$$L1 = \{px, py\}, \quad L2 = \{pa, pb, xa, xb, ya, yb\}$$
$$OUT_p = \{pa, pb, px, py\}$$
$$OUT_x = \{xa, xb\}, \quad OUT_y = \{ya, yb\}$$
$$IN_a = \{pa, xa, ya\}, \quad IN_b = \{pb, xb, yb\}$$
$$IN_x = \{px\}, \quad IN_y = \{py\}$$

上記の図の場合の定数の一覧

$$c1, \quad c2, \quad c3_x, \quad c3_y, \quad c4_x, \quad c4_y$$
$$d_{pa}, \quad d_{pb}, \quad d_{px}, \quad d_{py}, \quad d_{xa}, \quad d_{xb}, \quad d_{ya}, \quad d_{yb}, \quad ST, \quad P_p, \quad D_a, \quad D_b$$

決定変数

$$x_l, \quad l \in L$$

モデルファイル：p1.mod

```
#  p1.mod ; p1.dat ; 2008/3/1
#
#  第３回ロジスティクス勉強会
#  定式化の例（幹線輸送及び配送のみ考慮した場合）
#

/* 集合 */
set NP; /* 工場 */
set NS; /* 小売 */
set NC; /* 配送センター */

set L1; /* 幹線輸送 */
set L2; /* 配送 */
set L := L1 union L2;

set OUT{NP union NC};
set IN{NS union NC};

/* 定数 */
param c1;     /* 輸送単価[円/ﾄﾝｷﾛ] */
param c2;     /* 配送単価[円/ﾄﾝｷﾛ] */

param P{NP};  /* 生産量[円/年] */
param D{NS};  /* 需要量[円/年] */
param d{L};   /* 輸送距離[km] */

/* 決定変数 */
var x{L} >=0; /* 輸送量[ﾄﾝ/年] */

/* 目的関数 */
minimize Total_Cost: sum{l in L1}c1*x[l]*d[l] + sum{l in L2}c2*x[l]*d[l];

/* 制約条件 */
s.t. con1{i in NP} : P[i] >= sum{l in OUT[i]}x[l];
s.t. con2{i in NS} : D[i] <= sum{l in IN[i]}x[l];
s.t. con3{i in NC} : sum{l in IN[i]}x[l] = sum{l in OUT[i]}x[l];

end;
```

データファイル：p1.dat

```
set NP := p;
set NS := a b;
set NC := x y;

set L1 := px py;
set L2 := pa pb xa xb ya yb;

set OUT[p] := pa pb px py;
set OUT[x] := xa xb;
set OUT[y] := ya yb;

set IN[a] := pa xa ya;
set IN[b] := pb xb yb;
set IN[x] := px;
set IN[y] := py;

param c1 := 10;
param c2 := 20;

param P := p 10000;
param D :=
        a 1000
        b 2000
;
param d :=
        pa 20
        pb 30
        px 10
        py 10
        xa 10
        xb 20
        ya 15
        yb 25
;
```

【重要な補足】
OUT と IN は、AMPL の予約語となっている。したがって、AMPL を使用する場合は、例えば、Lout や Lin という用語にする必要がある。
なお、GLPK では特に問題はない。