ランダムな現象の発生

【例】
交通事故，大量生産の不良品，破産，火災，遺伝子の突然変異など、リスクや安全性に関連する現象

現象の発生確率
ランダムに現象が発生すると考えると、任意の時間(T)をM個の区間に分割した際の小区間内に現象が1回発生する確率は、次のとおりとなる。

$$p = \frac{\lambda \cdot T}{M} = \lambda \cdot \Delta t$$

λ：単位時間あたりの現象の発生回数
Δt：小区間の時間間隔

任意の時間(T)のM個の区間における特定のk個の小区間だけに、現象が1回発生する確率は、次のとおりとなる。

$${}_M C_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{M-k}$$

ここで、M→∞とすると、次のようになる。

$$\lim_{M\to\infty} {}_M C_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{M-k} = \lim_{M\to\infty} \frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^{M-k}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{M}\right)}{k!} \cdot (\lambda \cdot T)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^M \cdot \left(1-\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^{-k}$$

$$= \frac{(\lambda \cdot T)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda \cdot T)$$

ここで、λ・Tは、任意の時間(T)内における現象の平均発生回数であり、この値をmとして整理すると、次のようになる。
この確率分布をポアソン分布といい、現象の平均発生回数がmのときに、k回の発生がある確率を表している。

$$P(k,m) = \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}$$ （ポアソン分布の確率分布関数）

補足

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

次に現象の発生間隔について検討する。
時間 0 から T までの間に現象が発生しない確率は、次のようになる。

$$P(0, \lambda \cdot T) = \frac{(\lambda \cdot T)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \cdot T} = e^{-\lambda \cdot T}$$

これは、言い換えると現象の発生間隔が、T よりも大きくなる確率に相当する。したがって、発生間隔の確率密度関数を f とすると、次式が成り立つ。

$$\int_T^{\infty} f(T)dT = e^{-\lambda \cdot T}$$

$$f(T) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot T}$$ （指数分布の確率密度関数）

これは、現象の発生間隔が指数分布に従うことを意味している。

補足
なお、指数分布の累積分布関数は、次のとおりである。

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \qquad (x \geq 0), \qquad 0(x < 0)$$

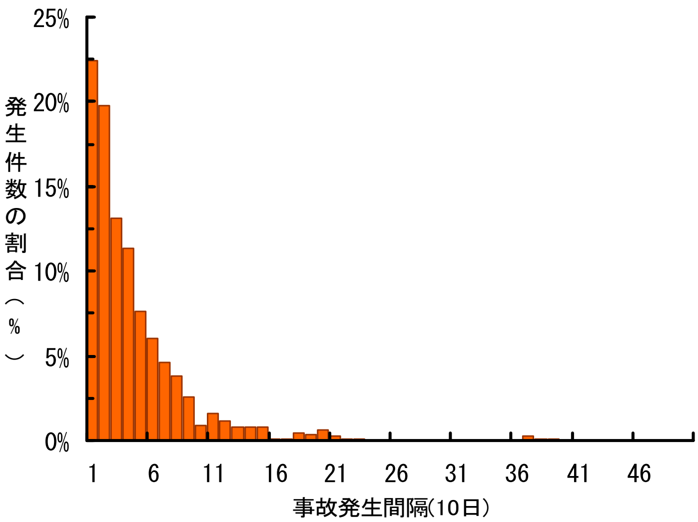


図　航空機事故の発生間隔

待ち合わせシステム

【例】

駅の切符売り場での待ち合わせ，病院の外来患者の待ち合わせ，旅行者の通関手続きの待ち合わせなど

●待ち合わせシステムの要素

(1) 単位到着の時間分布

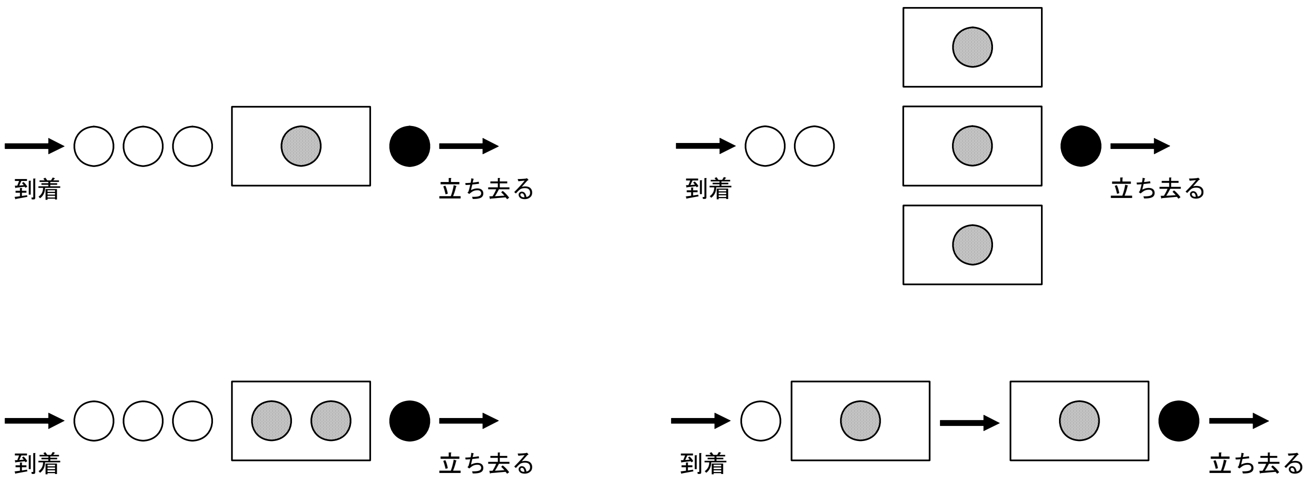
(2) サービス時間の特性

(3) サービス順

(4) サービス窓口数

(5) サービス段の数

(6) 到着数，あるいは待ち時間についての制限



●個別要素

(1)単位到着の時間分布

単位の到着：一定の時間間隔，ランダム（ポアソン分布）

(2)サービス時間の特性

一定サービス時間，指数型サービス時間，Erlang 型サービス時間，

(3)サービス順

先着順，ランダム，プライオリティ方式

(4)サービス窓口数

単一個，複数個（ファーストフード店のレジ）

(5)サービス段の数

単一段（駅の改札口），複数段（自動車の生産工程）

(6)到着数，あるいは待ち時間についての制限

到着単位数の限界，レストランが一杯の時に客が立ち去るなど

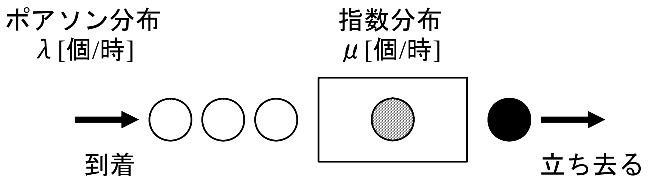
ケンドール記号

$$X/Y/S(N)$$

X：到着過程の種類
Y：サービス過程の種類
S：窓口数
N：待ち行列の最大長さ（無制限「∞」の場合は省略可能）

到着過程，またはサービス過程の種類
M：ポアソン分布，指数分布
D：一定分布
G：一般の分布（平均値と分散が既知の任意の分布）
Ek：位相 k のアーラン分布（k 個の指数分布の和）

基本的な単一窓口の解析（M/M/1）



単位時間あたりの到着数が、ポアソン分布に従い、単位毎のサービス時間が指数分布に従う。

トラフィック密度（ρ）

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

M/M/1(∞)モデル

①待たされる確率：
$$P_q = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

②平均滞在単位数：
$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

③平均滞在単位数の分散：
$$\sigma^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

④平均待ち行列長さ：
$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

⑤平均滞在時間：
$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

⑥平均待ち時間：
$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$