ランダムに発生する事象

【例】
交通事故，大量生産の不良品，破産，火災，遺伝子の突然変異など、リスクや安全性に関連する事象

事象の発生確率
ランダムに事象が発生すると考えると、任意の時間(T)をM個の区間に分割した際の小区間内に事象が1回発生する確率は、次のとおりとなる。

$$p = \frac{\lambda \cdot T}{M} = \lambda \cdot \Delta t$$

λ：単位時間あたりの事象の発生回数
Δt：小区間の時間間隔

任意の時間(T)のM個の区間における特定のk個の小区間だけに、事象が1回発生する確率は、次のとおりとなる。

$${}_M C_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{M-k}$$

ここで、M→∞とすると、次のようになる。

$$\lim_{M\to\infty} {}_M C_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{M-k} = \lim_{M\to\infty} \frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^{M-k}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{M}\right)}{k!} \cdot (\lambda \cdot T)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^M \cdot \left(1-\frac{\lambda \cdot T}{M}\right)^{-k}$$

$$= \frac{(\lambda \cdot T)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda \cdot T)$$

ここで、λ･Tは、任意の時間(T)内における事象の平均発生回数であり、この値をmとして整理すると、次のようになる。
この確率分布をポアソン分布といい、事象の平均発生回数がmのときに、k回の発生がある確率を表している。

$$P(k,m) = \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}$$

（ポアソン分布の確率分布関数）

補足

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

次に事象の発生間隔について検討する。
時間 0 から T までの間に事象が発生しない確率は、次のようになる。

$$P(0, \lambda \cdot T) = \frac{(\lambda \cdot T)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \cdot T} = e^{-\lambda \cdot T}$$

これは、言い換えると事象の発生間隔が、T よりも大きくなる確率に相当する。したがって、発生間隔の確率密度関数を f とすると、次式が成り立つ。

$$\int_T^\infty f(T) dT = e^{-\lambda \cdot T}$$

$$f(T) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot T}$$ （指数分布の確率密度関数）

これは、事象の発生間隔が指数分布に従うことを意味している。

補足
なお、指数分布の累積分布関数は、次のとおりである。

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \qquad (x \geq 0), \qquad 0 (x < 0)$$