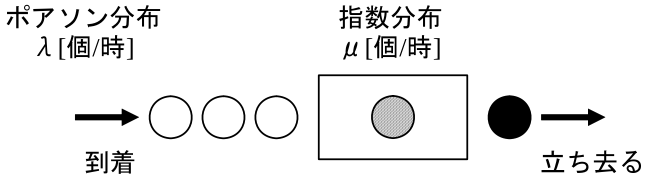
基本的な単一窓口の解析（M/M/1）



単位時間あたりの到着数が、ポアソン分布に従い、単位毎のサービス時間が指数分布に従う。

トラフィック密度（ρ）

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

●システム中にn単位存在する確率

行列中に単位が存在しない状態から計算するとする。

時刻(t+Δt)に、システム中にn個の単位が存在する確率P_n(t+Δt)は、次の4つの確率の和として求めることができる。

(1) 時刻tにシステム中にn単位存在し、その後Δt時間の間に、到着も立ち去る単位もない確率
(2) 時刻tにシステム中に(n−1)単位存在し、その後Δt時間の間に、1単位到着し、かつ立ち去る単位がない確率
(3) 時刻tにシステム中に(n+1)単位存在し、その後Δt時間の間に、到着する単位がなく、かつ1単位だけ立ち去る確率
(4) 時刻tにシステム中にn単位存在し、その後Δt時間の間に、1単位到着し、かつ1単位だけ立ち去る確率

ここで、Δt時間に1単位の到着がある確率は、λΔt、1単位のサービスが終わり立ち去る確率は、μΔtである。そして、Δtは十分小さくて、Δt時間に2単位の到着、あるいは立ち去る確率は、1単位の場合に比べて無視できるものとする。

(1)の確率

$$P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) \quad \rightarrow \quad P_n(t)\{1-(\lambda+\mu)\Delta t\}$$

Δtが十分小さいので、$(\Delta t)^2$の項は省略できる。以下、同様に省略する。

(2)の確率

$$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) \quad \rightarrow \quad P_{n-1}(t)\lambda\Delta t$$

(3)の確率

$$P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t \quad \rightarrow \quad P_{n+1}(t)\mu\Delta t$$

(4)の確率

$$P_n(t)\lambda\Delta t\mu\Delta t \quad \rightarrow \quad 0$$

以上の確率をまとめると、時刻(t+Δt)に、システム中にn個の単位が存在する確率 P_n(t+Δt)は、次のようになる。

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)\{1-(\lambda+\mu)\Delta t\} + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+1}(t)\mu\Delta t, \quad (n \geq 1)$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad (n \geq 1) \text{ ------------------------ } (1)$$

同様にして、時刻(t+Δt)に、システム中に0個の単位が存在する確率 P_0(t+Δt)は、次のようになる。

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\{1-\lambda\Delta t\} + P_1(t)\mu\Delta t, \quad (n=0)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \quad (n=0) \text{ -- } (2)$$

次に、ρ<1で定常解が存在する場合について求める。式(1)と(2)の微係数を0と置いて得られる定常状態方程式を次に示す。

$$(\lambda+\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, \quad (n \geq 1)$$
$$\lambda P_0 = \mu P_1, \quad (n=0)$$

ここで、 ρ=λ/μ を用いて、整理すると次のようになる。

$$(\rho+1)P_n = \rho P_{n-1} + P_{n+1}, \quad (n \geq 1)$$
$$\rho P_0 = P_1, \quad (n=0)$$

以上の式をもとに、任意の P_n について求めると、次の関係を導くことができる。

$$P_n = \rho^n P_0$$

また、次の関係がある。

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1$$

以上のことから、システム中に単位が存在しない確率 P_0 は、次式で与えられる。

$$P_0 = 1-\rho$$

また、この式よりシステム中にn個の単位が存在する定常確率 P_n は、次のとおりとなる。

$$P_n = \rho^n(1-\rho)$$

【補足】

幾何級数 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \dfrac{a}{1-r}, \quad (-1 < r < 1)$

●システム内単位数の平均

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = (1-\rho)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

【補足】

算術幾何級数 $a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots = \dfrac{a}{1-r} + \dfrac{rd}{(1-r)^2}, \quad (-1 < r < 1)$

●平均待ち時間

システムに到着してからサービスを受けるまでに、待ち行列に滞在する時間の平均を平均待ち時間という。平均待ち時間は、システム内の平均単位数(L)に平均サービス時間(1/μ)を乗じて求めることができる。

$$W_q = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

●平均待ち行列長さ

リトルの公式（平均値の法則）

$$L_q = \lambda \cdot W_q$$

W_q：平均待ち時間[時]
L_q：平均待ち行列長さ[個]
λ：平均到着数[個/時]

M/M/1(∞)モデル

①待たされる確率：
$$P_q = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

②平均滞在単位数：
$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

③平均滞在単位数の分散：
$$\sigma^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

④平均待ち行列長さ：
$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

⑤平均滞在時間：
$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

⑥平均待ち時間：
$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$