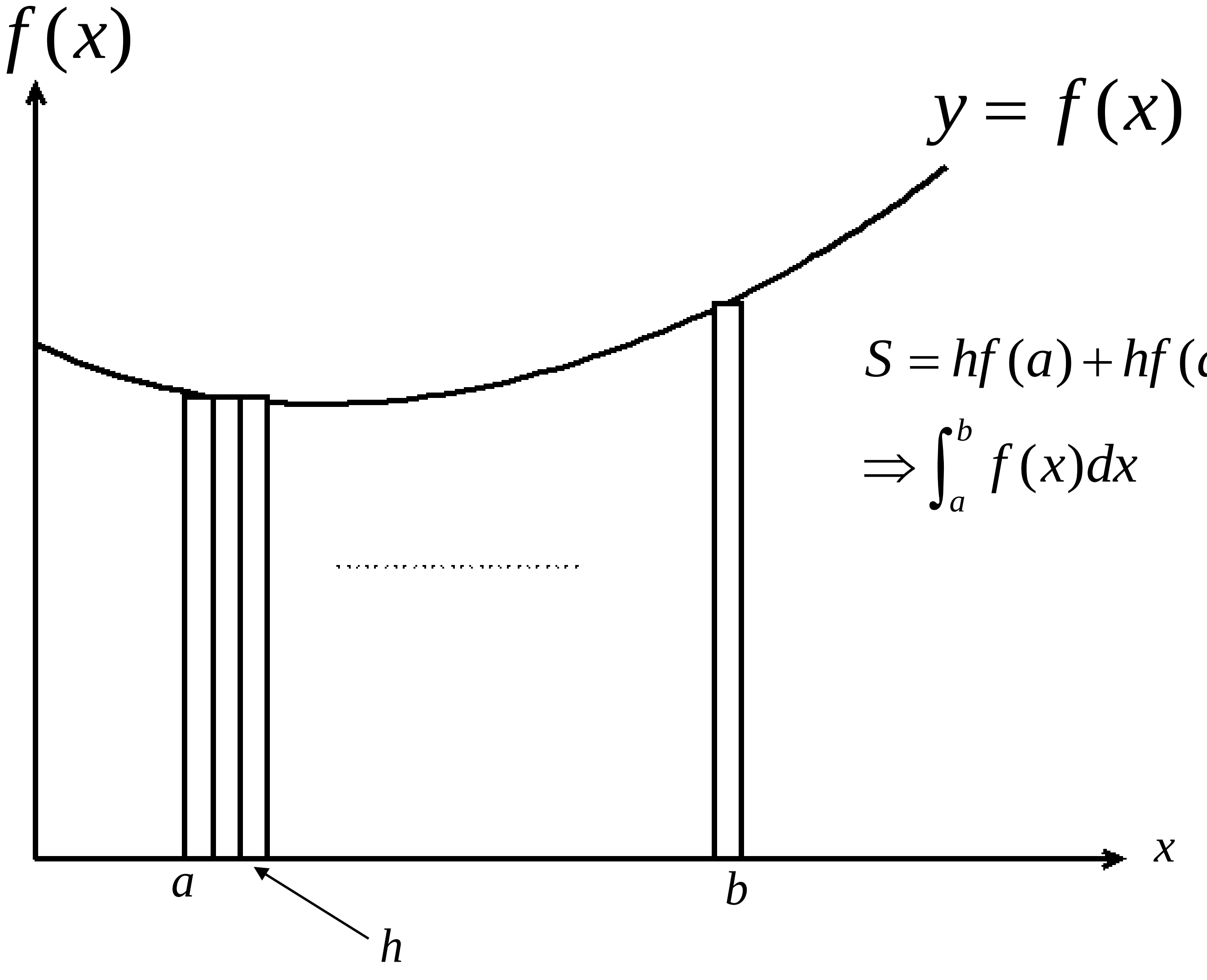
情報処理概論I（FORTRAN）
15 回目

数値積分
台形公式、シンプソンの公式

積分は曲線の下の面積を求めることです。基本的には曲線を微少な短冊に分けて、集積して（Sum up）求めるということです。



$$S = hf(a) + hf(a+h) + \ldots\ldots hf(b)$$

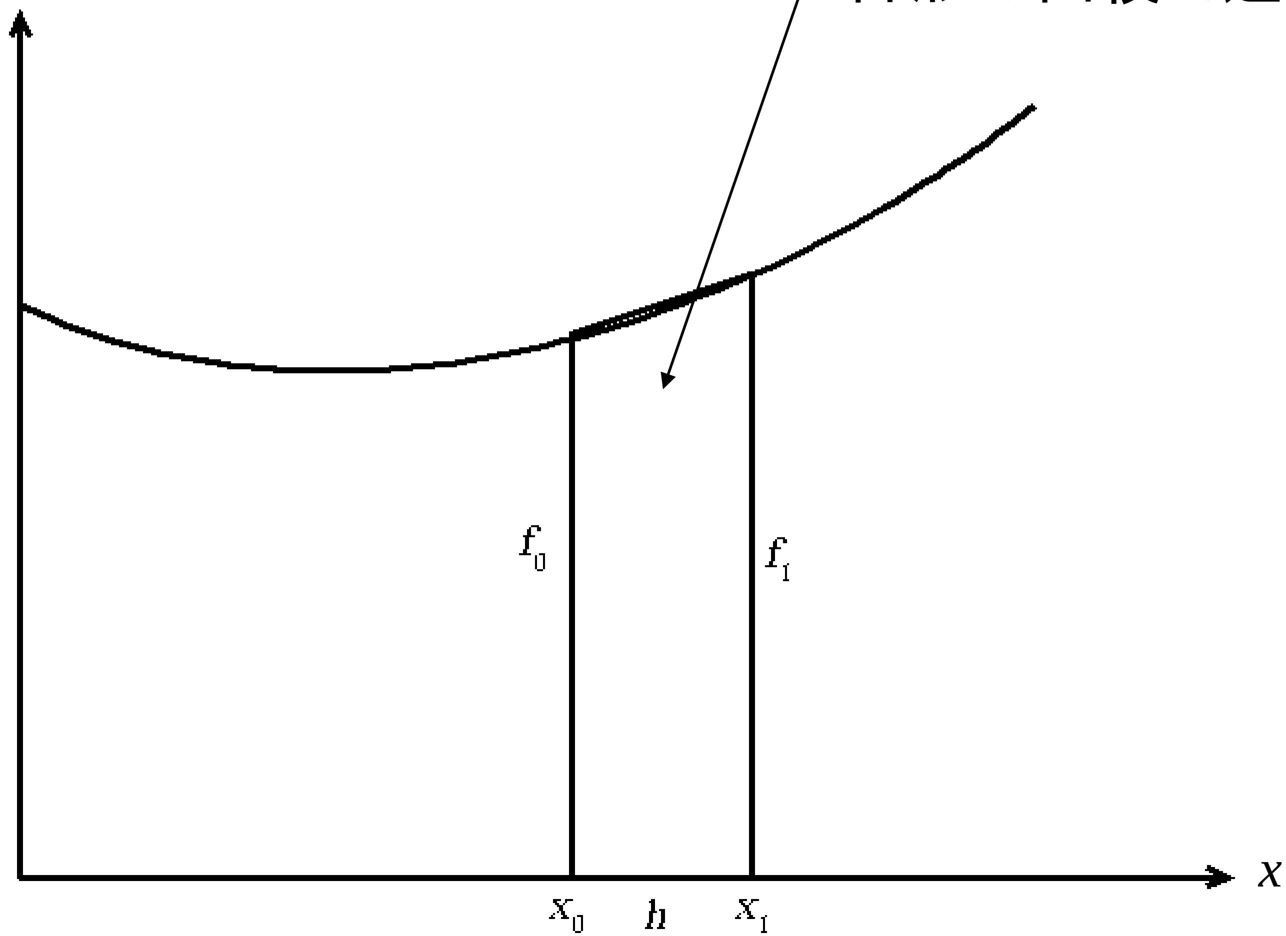
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$$

この積分がたちの良い関数であれば、コンピュータなど使わなくても即積分して答えを求めることになります。例えば

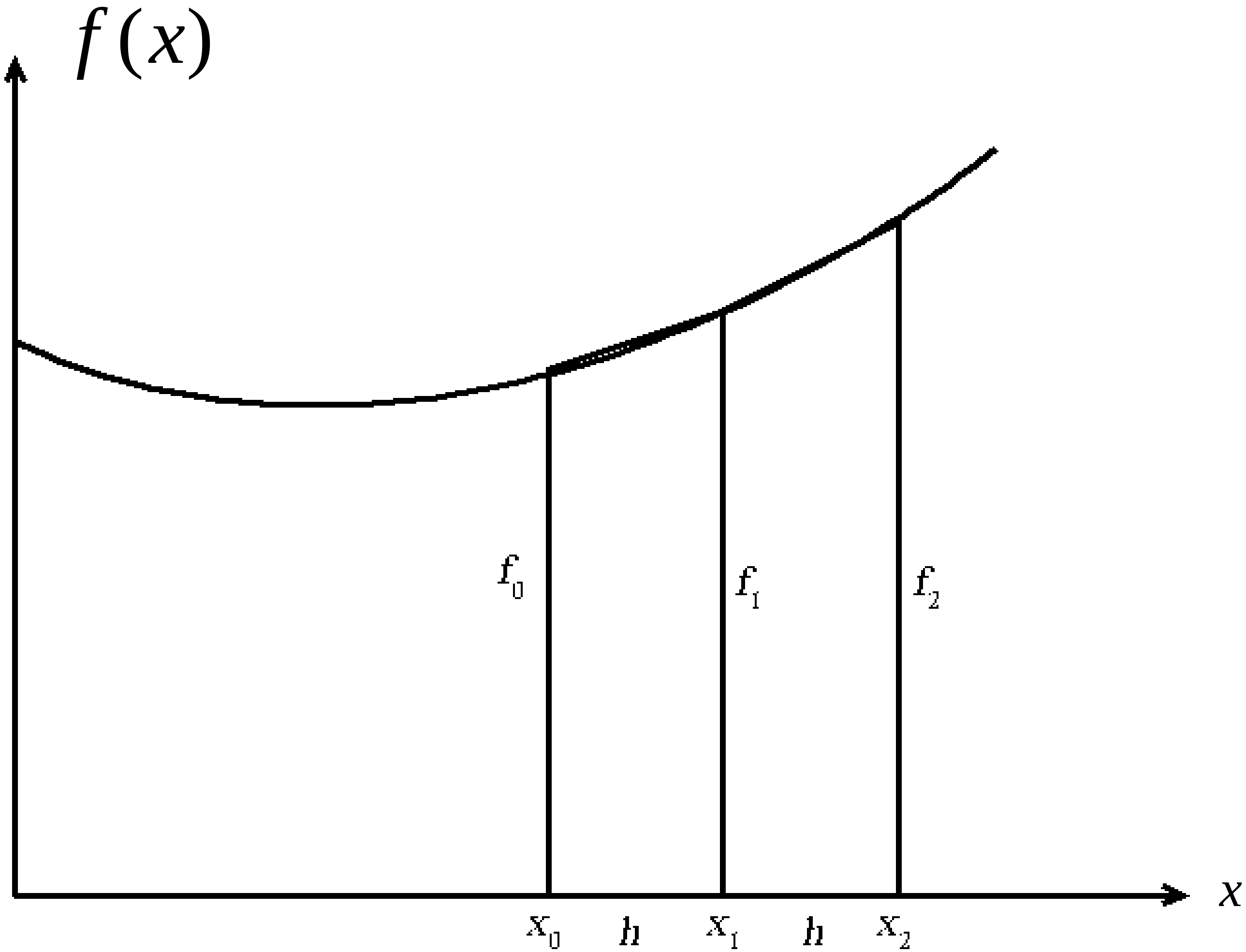
$$y = f(x) = 2x \Rightarrow \int_a^b 2x dx = \left[x^2 \right]_a^b = b^2 - a^2$$

のように楽勝で積分できるでしょう。これは元々は前ページの図のように無数の短冊を考え、その面積を足し合わせるという考えに基づくものです。ところがその値を計算することが難しい場合には、原点に戻って数値的に積分しようと考えるのです。

台形公式 $f(x)$



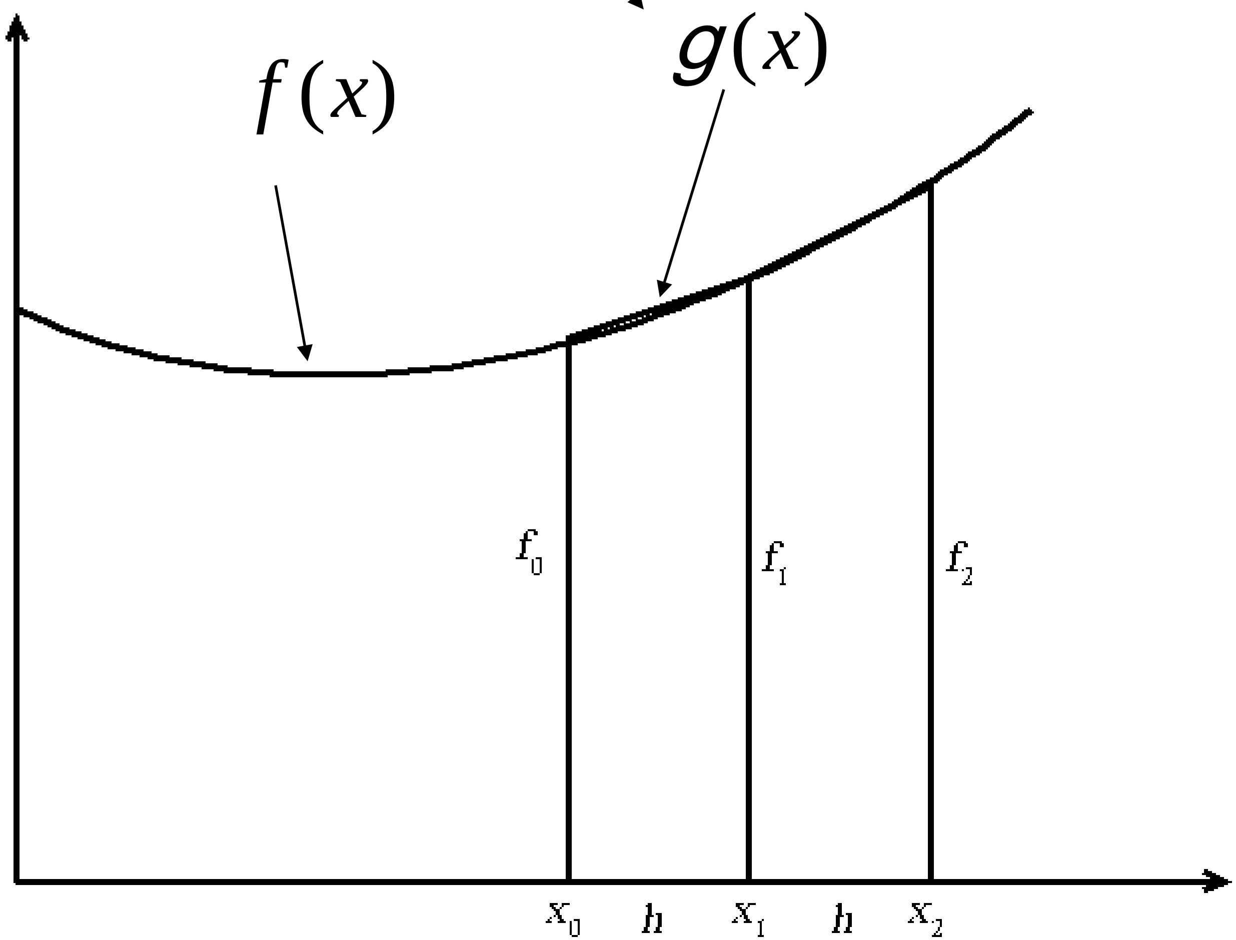
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1 \right)$$



$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right) + \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + f_2\right)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left\{ f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + ... + f_{n-1}\right) + f_n\right\}$$

台形公式では任意の曲線を直線で近似して、台形の面積で積分を近似したが、二次関数で近似する場合がある。この場合は近似する二次関数は三点が決まれば決定することが出来る。



今この二次関数を

$$g(x) = a(x - x_1)^2 + b(x - x_1) + c$$

の形で考え、$f(x)$上の三点を通ることから、a,b,cを決定する。

$$f_0 = a(x_0 - x_1)^2 + b(x_0 - x_1) + c = ah^2 - bh + c$$

$$f_1 = c$$

$$f_2 = a(x_2 - x_1)^2 + b(x_2 - x_1) + c = ah^2 + bh + c$$

$$\therefore a = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2}, b = \frac{f_2 - f_0}{2h}, c = f_1$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} g(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2 \right)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left\{ f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + \ldots\ldots + f_{2n-1} \right) + 2\left(f_2 + f_4 + \ldots\ldots + f_{2(n-1)} \right) + f_n \right\}$$

一般的には積分しようとする区間を偶数個に分割して
積分を行う。

問題９－１

$$\int_{x_0}^{x_n} \frac{c}{1+x^2}\,dx$$

の定積分を数値的に行う。x_0=0.0,x_n=1.0とし、分割数n=4,10,100の場合をそれぞれ行う。台形公式、シンプソンの公式で行い、解析解と比較する。

$f(x)=\dfrac{c}{1+x^2}$の不定積分は$\tan^{-1}x$である。