連立 1 次方程式の解法

1　変数消去と行基本変形

次の連立 1 次方程式の解を求めたい．

$$\begin{cases} x+ \quad y = 2 \\ x+ 3y = 4 \end{cases}$$

変数消去を用いて解を求めるが，係数と右辺の変化の様子を行列を用いて表してみよう．

$$\begin{cases} x+ \quad y = 2 \\ x+ 3y = 4 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x+ \quad y = 2 \\ \qquad 2y = 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x+ y = 2 \\ \qquad y = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x \qquad = 1 \\ \qquad y = 1 \end{cases}$$

よって，解は $x = 1$，$y = 1$ である．

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

上記の連立 1 次方程式と行列を比べると，行列は，連立方程式の変数 x, y と $=$ を省略しただけのものである．また，上記の変形には，

1. ある式の定数倍を他の行にたす
2. 式を入れ換える[1]
3. 式に 0 以外の数をかける

1. ある行の定数倍を他の行に足す
2. 行を入れ換える
3. 行に 0 以外の数をかける

という対応関係があるので，変数消去で用いる操作は，行基本変形と同等である．

[1] 上記では，この操作は行っていない．

2　拡大係数行列

行列とベクトルの積を考えると，

$$\begin{cases} x+ & y & = & 2 \\ x+ & 3y & = & 4 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とかける．このとき，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を 係数行列 と呼ぶ．また，先程の変数消去を表すために用いた行列 $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$ を 拡大係数行列 と呼ぶ（行列内部の縦線は書かなくて良い）．

一般に，連立 1 次方程式は，行列 A とベクトル b を用いて，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる．このとき，係数数行列は A，拡大係数行列は $(A\ \boldsymbol{b})$ である．

特に，連立 1 次方程式は，拡大係数行列を行基本変形することで解くことができる．理論的にも重要であることから，今後は連立 1 次方程式は，拡大係数行列を用いて解いて欲しい．

3　例題

例題 1. 次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 6 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 11 \\ 2x+ & 3y- & 4z = & 3 \end{cases}$$

（解答）行基本変形より，まず階段行列を求めると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

さらに 後退消去（下のような操作．改めて定義はしない）を行うと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ここで，得られた行列が表す連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 3 \\ & & z = & & 2 \end{cases}$$

でとなるので，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

例題 2. 次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad z = 6 \\ x+ \quad y+ \quad 2z = 11 \\ 2x+ \quad 3y- \quad 4z = 3 \end{cases}$$

（解答）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

2 行 2 列が 0 になった．このときは，行の交換をして行基本変形を進める．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 21 \\ 5 \end{pmatrix}$ である．

4　解を持たない連立 1 次方程式

今までの問題は，解を求めることが出来たが，連立 1 次方程式には解を持たないものも存在する．次の連立方程式を考えよう．

$$\begin{cases} x+ \quad y = 1 \\ x+ \quad y = 2 \end{cases}$$

この連立方程式に解が存在したとする．すると，（第 2 式）−（第 1 式）より，

$$0 = 1$$

となり矛盾である．よって，連立方程式に解は存在しない．これを拡大係数行列で表すと，

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる．行基本変形後の行列の最後の行が $(0, 0, 1)$ のとき，$0 = 1$ という矛盾した式が現れる．

例題 3. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x+ & y+ & z= & 6 \\ x+ & y+ & 2z= & 11 \\ 2x+ & 2y- & 4z= & 3 \end{cases}$$

(解答)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & y & = & 1 \\ & & z= & 0 \\ & & 0= & 1 \end{cases}$$

と変形されたので, 解は存在しない.

5　解が無限個有る場合（パラメータ表示）

連立 1 次方程式には，無限個の解を持つものもある.

$$\begin{cases} x+ & y & = & 1 \\ 2x+ & 2y & = & 2 \end{cases}$$

この連立方程式で，変数消去をすると，第 2 式が消えて，

$$x+y=1$$

という式だけが残る．実際，この連立方程式には，本質的には一つの方程式しかない．この方程式の解は，$(x,y)=(1,0),(2,-1),(3,-2),\ldots$ など，無限個の解があることがわかる．

この場合，t をパラメータとして，$y=t$ とおくと，

$$x=1-y=1-t$$

とかけるので，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける．実際，任意の t に対して，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を代入すれば，連立方程式を満たすことがわかる.

例題 4. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} x+ & 4y+ & 2z+ & 3w = & 1 \\ 2x+ & 3y+ & 4z+ & w = & -2 \\ 3x+ & 2y+ & z+ & 4w = & 3 \\ 4x+ & y+ & 3z+ & 2w = & 0 \end{cases}$$

(解答)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -15 & -5 & -10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x & & + & w = & 1 \\ & y & + & w = & \frac{4}{5} \\ & & z- & w = & -\frac{8}{5} \end{cases}$$

と変形された.
パラメータ t を用いて, $w = t$ と置くと,

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{4}{5} - t \\ z = -\frac{8}{5} + t \end{cases}$$

と書ける．よって，解は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ \frac{4}{5} - t \\ -\frac{8}{5} + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける.

6　文字の入った連立 1 次方程式

例題 5. 以下の連立方程式が解を持つように，a を定めて解を求めよ.

$$\begin{cases} x+ & y+ & z= & 6 \\ x+ & y+ & 2z= & 11 \\ 2x+ & 2y- & 4z= & a \end{cases}$$

(解答)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & -4 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & a-12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+18 \end{pmatrix}.$$

よって連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & y+ & z= & 6 \\ & & z= & 5 \\ & & 0= & a+18 \end{cases}$$

と変形された. 最後の式に注目すると, $a+18=0$ のときのみ解が存在することがわかる. このとき連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 5 \end{cases}$$

となる. よって解が存在するのは $a=-18$ のときであり, そのとき, パラメータ t を用いて $y=t$ と置くと, 解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける.