

第5章 線形計画問題

5.1 線形計画問題とは

最適化問題

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } f(x) \\ & \text{制約 } g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

において、目的関数も制約式も1次式であるものを線形計画問題と呼ぶ。線形計画問題は、一見特殊な問題に見えるが、大規模な問題でも高速に解けるという利点があるので、応用上良く用いられる。例として以下の単純化した問題を挙げる。

[例] 5.1. ある工場で製品1、製品2を生産する。製品1は原材料Aを1kg、原材料Bを3kg使用し8万円で売れる。また、製品2は原材料Aを1kg、原材料Bを1kg使用し6万円で売れる。原材料Aが4kg、原材料Bが6kgあるとき、製品1と製品2をいくつつつ作れば利益が最大になるか？

この問題は表にまとめると

	製品1	製品2	在庫
原材料A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

となる。製品1の個数を x_1 、製品2の個数を x_2 とし、この問題を最適化問題で定式化すると

$$\begin{aligned} & \text{最大化 } 8x_1 + 6x_2 && \text{(利益)} \\ & \text{制約式 } x_1 + x_2 \leq 4 && \text{(原材料Aの在庫)} \\ & \quad \quad \quad 3x_1 + x_2 \leq 6 && \text{(原材料Bの在庫)} \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

となるので、線形計画問題になる。

5.2 単体法

次の例を用いて線形計画法の解法について勉強しよう.

$$\begin{aligned}
 \text{(P) 最小化} \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
 \text{制約} \quad & x_1 + x_3 \leq 2 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

この問題の実行可能領域は、図 5.1 のような角張った立体の内部と面上の点からなる。このように 1 次式の不等式で定義される立体を **多面体** と呼ぶ。

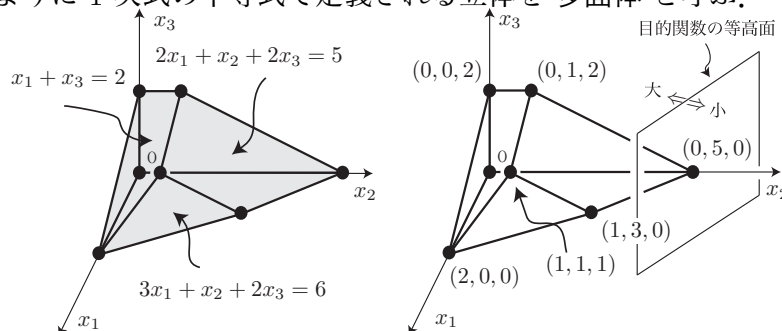


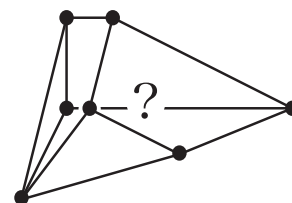
図 5.1: 実行可能領域と等高面

いま、問題 (P) の目的関数も 1 次関数なので、その等高面は図 5.1 の右のように平面になる。よって、最小解が多面体のいずれかの頂点にあることがわかるだろう。したがって、実行可能領域の頂点をすべて求めれば、頂点における目的関数値を比べて、最も小さいものが最小解になる ((P) では $(0, 5, 0)$)。しかし、実はすべての頂点を求めるのは意外に大変である。

5.2.1 単体法の概要

さて、実行可能解の頂点が未知の場合どのように問題を解いたら良いだろうか？ここでは **単体法** と呼ばれるアルゴリズムを用いて線形計画問題を解く。

まず、例外的な現象が起こらない場合に、単体法の主要な操作を説明する。例外処理については 5.2.3 で説明する。



実際には形もわからない

1. スラック変数を導入する

まず、問題 (P) を スラック変数 と呼ばれる x_4, x_5, x_6 を導入して次の同値 な問題に変形する.

$$\begin{aligned}
 & \text{最小化} && -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
 & \text{制約} && x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\
 & && 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5 \\
 & && 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 6 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

例えば,

$$\text{点 A : } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

は (P) の実行可能解である. これは自然に問題 (5.1) の実行可能解に拡張される. 問題 (5.1) の制約式に代入すると,

$$x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 1$$

となり,

$$\text{点 A' : } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は問題 (5.1) の実行可能解になる. ここで, 問題 (5.1) の制約式は

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 2 - (x_1 + x_3) \\
 x_5 &= 5 - (2x_1 + x_2 + 2x_3) \\
 x_6 &= 6 - (3x_1 + x_2 + 2x_3)
 \end{aligned}$$

と変形できるので, 点 A' でスラック変数 $x_4 = 0, x_5 = 0$ ということは, 点 A は二つの平面

$$x_1 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

の上の点であるということを表している (図 5.1 で確認できる).

2. 辞書を作る

スラック変数を導入したあと，問題 (5.1) の制約式でスラック変数 x_4, x_5, x_6 を左辺に残し，残りを右辺へ移項し，目的関数を z とおく．

$$\begin{aligned}
 \text{(辞書 1) 最小化 } z &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
 \text{制約 } x_4 &= 2 - x_1 - x_3 \\
 x_5 &= 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 x_6 &= 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
 \end{aligned}$$

左辺に現れる変数 x_4, x_5, x_6 を基底変数，右辺に現れる変数 x_1, x_2, x_3 を非基底変数と呼ぶ．ここで，

基底変数は目的関数の変数に含まれていない

ことに注意しよう．この形を線形計画問題の辞書と呼ぶ．

3. 実行可能基底解を求める

ここで，辞書の非基底変数 x_1, x_2, x_3 をすべて 0 として得られる実行可能解

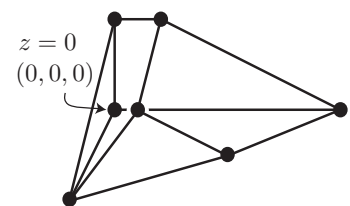
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

を辞書の 実行可能基底解 と呼ぶ．

いま，ここでの目的関数値は $z = 0$ となる．また，この点は元問題 (P) の実行可能領域の

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{多面体の頂点})$$

に対応していることに注意してほしい．



4. 解の更新

次に，この実行可能基底解を次のようなルールで変更する．

解の更新ルール

- (i). 非基底変数の中から，目的関数において係数が負であるものを一つ選び，その値を t ，その他の非基底変数の値を 0 とおく。
- (ii). すべての基底変数が負にならない範囲で，(i) で選んだ非基底変数の値 t を最大まで増やす。

このルールを適用すると，実行可能基底解と目的関数にはどのような変化が起こるだろうか？

まず更新ルール (i) より非基底変数を選ぶ。辞書 1 では非基底変数は x_1, x_2, x_3 である。この中から目的関数 z で係数が負である x_3 を選ぶ。ここで， $x_3 = t$ ，その他の非基底変数 $x_1 = x_2 = 0$ とおくと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2-t \\ 5-2t \\ 6-2t \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

となる。

次に更新ルール (ii) を満たす t を求めると，

$$\begin{aligned} x_4 = 2 - t, x_4 \geq 0 &\Rightarrow 2 \geq t \geq 0 \\ x_5 = 5 - 2t, x_5 \geq 0 &\Rightarrow 5/2 \geq t \geq 0 \\ x_6 = 6 - 2t, x_6 \geq 0 &\Rightarrow 3 \geq t \geq 0 \end{aligned}$$

なので，どの x_4, x_5, x_6 も負にならない最大の t は $t = 2$ となる。代入すると，

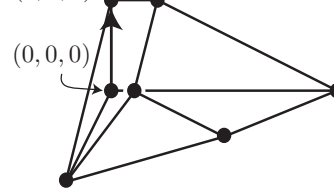
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 2-t \\ 5-2t \\ 6-2t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となり，新しい実行可能解が得られる。このとき目的関数値は

$$z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 = -6$$

となり，確かに目的関数値は減少している。

解の更新ルールの図形的意味



ここで更新ルールの適用によって、実行可能解がどのように変化しているか、図で解説しよう。式 (5.2) で $t=0$ のときは、点は元の実行可能基底解 (P の $(0,0,0)$) と一致する。 t を大きくしていくと、点は $x_1=0, x_2=0$ を保ちながら動くので、多面体の辺上 (z 軸上) を移動する。 $t=2$ のとき、スラック変数が $x_4=0$ となるので、点は平面 $x_1+x_2=2$ 上に位置する。このとき、点は新たな頂点 $(0,0,2)$ に達しており、そこでは目的関数値は元の頂点における値より小さくなっている。

5. 辞書の更新

更新ルールの適用後、元の実行可能基底解と新しい実行可能解

$$(旧) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (新) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を比べて、

[非基底変数] $x_3 \rightarrow$ 正

[基底変数] $x_4 \rightarrow 0$

となっていることに注目しよう。次に、このような非基底変数 x_3 を基底変数に、基底変数 x_4 を非基底変数に入れ替えた新しい辞書を作成する。まず、辞書 1 で x_4 の関係する制約式を

$$x_3 = 2 - x_1 - x_4$$

と変形する。これを他の式に代入し、すべての式 (目的関数も含む) の右辺から x_3 を消去すると、新しい辞書

$$(辞書 2) \text{ 最小化 } z = -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4$$

$$\text{制約 } x_3 = 2 - x_1 - x_4$$

$$x_5 = 1 - x_2 + 2x_4$$

$$x_6 = 2 - x_1 - x_2 + 2x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

が得られる。ここで、変数の位置を入れ替えているだけなので、辞書 1 と辞書 2 は同値な問題になっている。また、

「辞書 2 は新しい実行可能解を実行可能基底解にもつ辞書である」

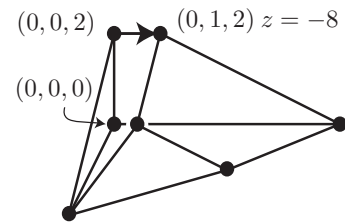
ことに確認しておこう。

6. 4, 5 の反復

辞書 2 に同様の操作を繰り返す. 辞書 2 では非基底変数は x_1, x_2, x_4 である. その中で目的関数の係数が負であるのは x_2 だけなので $x_2 = t$ とおき, その他の非基底変数について $x_1, x_4 = 0$ とする.

次に, 変数 $x_2 = t$ を増加させる. 増加幅は更新ルール (ii) より, $t = 1$ になる. このとき新しい実行可能解は,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 2 \\ 0 \\ 1-t \\ 2-t \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



となる.

次に辞書を更新する. いま,

[非基底変数] $x_2 \rightarrow$ 正

[基底変数] $x_5 \rightarrow 0$

より, x_2 が基底変数, x_5 が非基底変数になるように辞書を更新する. x_5 の関係する式より,

$$x_2 = 1 + 2x_4 - x_5$$

を得るので, この式を用いて式の右辺から x_2 を消去する. 新しい辞書は以下になる.

(辞書 3) 最小化 $z = -8 + 2x_1 - x_4 + 2x_5$

制約 $x_3 = 2 - x_1 - x_4$

$x_2 = 1 + 2x_4 - x_5$

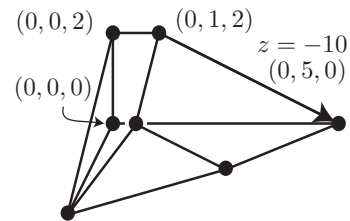
$x_6 = 1 - x_1 + x_5$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

反復 2 回目

辞書 3 では x_1, x_4, x_5 が非基底変数になる. 目的関数の係数より $x_1, x_5 = 0$ として x_4 を増加させると, 増加幅は $t = 2$ となる. 新しい実行可能解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+2t \\ 2-t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



となる。いま

$$[\text{非基底変数}] \quad x_4 \rightarrow \text{正}$$

$$[\text{基底変数}] \quad x_3 \rightarrow 0$$

となったので、新しい辞書は

$$(\text{辞書 4}) \text{ 最小化} \quad z = -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5$$

$$\text{制約} \quad x_4 = 2 - x_1 - x_3$$

$$x_2 = 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5$$

$$x_6 = 1 - x_1 + x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

となる。いま、目的関数の変数の係数はすべて 0 以上になっているので、更新ルール (i) が適用できない。ここで解の更新を終了する。

7. 単体法の終了

いま、すべての変数が零以上であるという制約があるので、辞書 4 の最適値は $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ のとき -10 である。制約式より、辞書 4 の最適解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で、最適値は -10 となる。さて、いままでの変形を振り返ると、辞書 1 から変数の位置を変えているだけなので、辞書 4 の最適解は辞書 1 の最適解となる。したがって、元の問題の最適解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり、最適値は -10 となる。

まとめ

5.2. 単体法

単体法は以下のステップからなる。

1. スラック変数を導入する
2. 辞書を作る
3. 実行可能基底解を求める
4. 解の更新
5. 辞書の更新
6. 4, 5 の反復
7. 4 で解の更新ができなければ終了

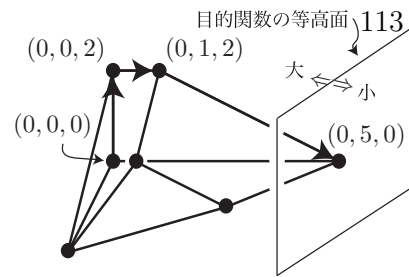


図 5.2: 頂点を求める順番

まず辞書を作り，始めの実行可能解 $(0,0,0)$ を求める．この実行可能解を変更し (ステップ 4)，隣の頂点で目的関数値を減少させるものを求める．辞書を更新し (ステップ 5)，また次の頂点を求める．単体法は，図 5.2 のように目的関数値が減る方向にある頂点を求めることで，最適解を求めるアルゴリズムである．

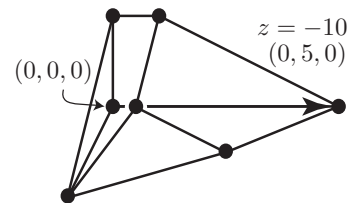
考察

さて，もし最適解と図 5.2 のように頂点の位置関係がわかっていたら，図 5.2 のような順番で頂点を求めるのではなく，始めの実行可能解 $(0,0,0)$ から直接 $(0,5,0)$ に移動した方が効率が良い．実際に，頂点の求め方がこのような順番になるように，実行可能基底解と辞書の更新を試みよう．辞書 1 を再掲する．

$$\begin{aligned}
 \text{(辞書 1) 最小化 } z &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
 \text{制約 } x_4 &= 2 - x_1 - x_3 \\
 x_5 &= 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 x_6 &= 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
 \end{aligned}$$

実行可能基底解は $(0,0,0,2,5,6)$ である．非基底変数は x_1, x_2, x_3 であり，目的関数の係数はすべて負になっている．先程は x_3 を増加させたが，今回は x_2 を増加させる． $x_2 = t$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 2 \\ 5-t \\ 6-t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



となる。いま

$$x_2 \rightarrow \bar{x}, \quad x_5 \rightarrow 0$$

と変化したので、新しい辞書は

$$\begin{aligned} \text{(辞書 2')} \quad \text{最小化} \quad z &= -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5 \\ \text{制約} \quad x_2 &= 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\ x_4 &= 2 - x_1 - x_3 \\ x_6 &= 1 - x_1 + x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。目的関数の変数の係数がすべて 0 以上なので、最適解 -10 がすぐ求まる。
このように、ここで紹介した単体法には工夫の余地がある。実際に用いられているアルゴリズムは、様々な改良が加えられている。

ピボット

単体法のより簡便な計算方法を紹介する。まず上記の辞書 1 を以下のように書くことにする：

$$\begin{aligned} \text{(D1)} \quad z &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_4 &= 2 - x_1 - x_3 \\ x_5 &= 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

ここで、

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

はどの辞書でも変わらないので省略する。

上記の [ステップ 5 辞書の更新] では、非基底変数 x_3 を基底変数に、基底変数 x_4 を非基底変数に入れ替える際に代入を用いた。ここではその代わりに式の引き算を用いる。まず左辺に x_4 がある式の x_3 をピボットと呼び、丸で囲む：

$$\begin{aligned} \text{(D1)} \quad z &= -x_1 - 2x_2 - 3\mathbf{x_3} \\ \mathbf{x_4} &= 2 - x_1 - \mathbf{x_3} \\ x_5 &= 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 6 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

このピボットに注目すると、制約第 1 式の右辺から x_3 を消去するためには、

$$\begin{array}{r} x_5 = 5 - 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ (-2) \times x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ \hline x_5 - 2x_4 = 1 - x_2 \\ \downarrow \\ x_5 = 1 - x_2 + 2x_4 \end{array}$$

と計算すれば良い. このような計算により, 新しい辞書

$$(D2) \quad \begin{array}{r} z = -6 + 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 - x_4 \\ x_5 = 1 - \textcircled{x_2} + 2x_4 \\ x_6 = 2 - x_1 - x_2 + 2x_4 \end{array}$$

を得る. (D2) の右辺から消去する変数を x_2 とする. x_2 を増加させたとき, 始めに 0 に達する基底変数は x_5 なので, ピボットは丸の箇所になり, 新しい辞書は

$$(D3) \quad \begin{array}{r} z = -8 + 2x_1 - x_4 + 2x_5 \\ x_3 = 2 - x_1 - \textcircled{x_4} \\ x_2 = 1 + 2x_4 - x_5 \\ x_6 = 1 - x_1 + x_5 \end{array}$$

となる. (D3) で右辺から消去する変数を x_4 とする. x_4 を増加させたとき, 始めに 0 に達する基底変数は x_3 なので, ピボットは丸の箇所になり, 新しい辞書

$$(D4) \quad \begin{array}{r} z = -10 + 3x_1 + x_3 + 2x_5 \\ x_4 = 2 - x_1 - x_3 \\ x_2 = 5 - 2x_1 - 2x_3 - x_5 \\ x_6 = 1 - x_1 + x_5 \end{array}$$

を得る. ここで目的関数の変数の係数がすべて 0 以上であるので, 単体法が終了し, 最適値 -10 を得る.

さて, (D1) から (D4) において, 制約式の定数項はすべて 0 以上の値になっている. 実は, 変数の入れ替えに用いる基底変数の選び方 (ピボットの選び方) は, 辞書を更新したときに定数項がすべて 0 以上になるような選び方になっている.

5.2.2 例題

線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{制約} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

を単体法を用いて解く.

まず, スラック変数を導入して辞書を作る.

$$\begin{array}{ll} \text{(辞書 1) 最小化} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{制約} & x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ & x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

さらにこれを以下のように省略して書く：

$$(D1) \quad \begin{array}{l} z = -x_1 - 2x_2 \\ x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \end{array}$$

ここで、(D1) の右辺から削除する変数を x_2 とすると、ピボットは以下の丸の箇所になる：

$$(D1) \quad \begin{array}{l} z = -x_1 - 2x_2 \\ x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 + 2x_1 - \textcircled{x_2} \end{array}$$

これより、新しい辞書

$$(D2) \quad \begin{array}{l} z = -4 - 5x_1 + 2x_4 \\ x_3 = 1 - 3\textcircled{x_1} + x_4 \\ x_2 = 2 + 2x_1 - x_4 \end{array}$$

を得る。(D2) で右辺から削除する変数を x_1 とすると、ピボットは (D2) の丸の箇所となり、新しい辞書は

$$(D3) \quad \begin{array}{l} z = -\frac{17}{3} + \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{array}$$

となる。ここで、目的関数の変数の係数がすべて 0 以上であるので、解の更新は終了し、(D3) の最小解は $(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, 0, 0)$ である。したがって、元の問題の最小解は $(\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$ で、最小値は $-\frac{17}{3}$ となる。

【練習問題】 6. 単体法を用いて最適解を求めよ。

(1).

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -8x_1 - 6x_2 \\ \text{制約} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(2).

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{制約} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

5.2.3 例外処理

さて、前節の例では特別な問題なしに単体法を適用できたが、実際には次の4つ例外的な場合がある：

- (1). 問題が非有界
- (2). 辞書の退化
- (3). 辞書の巡回
- (4). 初期点が実行不可能

問題が非有界

そもそも線形計画問題が最適解を持たない場合がある。一つは実行可能領域が空集合の場合で、もう一つは目的関数値をいくらでも小さくすることができる場合である。後者について考える。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 \\ \text{制約} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

この問題に単体法を適用する。まず、スラック変数を導入して辞書を作る。

$$\begin{array}{l} \text{(D1)} \quad z = -x_1 \\ \quad \quad x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ \quad \quad x_4 = 1 + x_1 - x_2 \end{array}$$

ピボットを丸の箇所とすると、新しい辞書は

$$\begin{array}{l} \text{(D2)} \quad z = -1 - x_2 + x_3 \\ \quad \quad x_1 = 1 + x_2 - x_3 \\ \quad \quad x_4 = 2 - x_3 \end{array}$$

となる。ここで、目的関数の変数で係数が負のものは x_2 である。一方、制約式では x_2 の係数は正、又は0なので、 x_2 の値はいくらでも大きくできる。よってこの場合は、目的関数値をいくらでも小さくできるので、最適解は存在しない。

このような問題を非有界な線形計画問題、又は単に非有界な問題と呼ぶ。ただし、実行可能領域が非有界の場合でも、問題が非有界とは限らない。例えば、目的関数

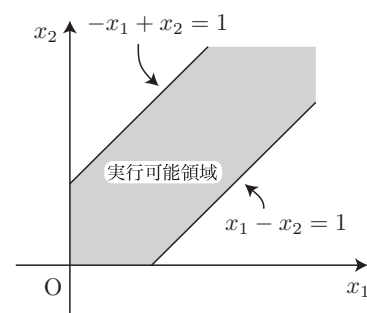


図 5.3: 実行可能領域が非有界

のみを変更した問題

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } x_1 + x_2 \\ & \text{制約 } x_1 - x_2 \leq 1 \\ & \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

には最適解 $(0, 0)$, 最適値 0 が存在する.

辞書の退化

非有界な問題とは逆に非基底変数の値を全く増やせない場合もある.

$$\begin{aligned} & \text{最小化 } -x_1 \\ & \text{制約 } x_1 - x_2 \leq 0 \\ & \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

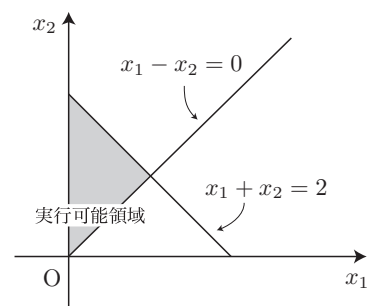


図 5.4: 二つの辞書 D1, D2 が同じ実行可能基底解 $(0, 0)$ を持つ

この問題に単体法を適用するために, まず辞書を作成する.

$$\begin{aligned} \text{(D1)} \quad & z = -x_1 \\ & x_3 = -\textcircled{x_1} + x_2 \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

ここで, 目的関数の変数で係数が負のものは x_1 のみである. しかし, 制約式を見ると x_1 を 0 から少しでも大きくすると, x_3 が負になるので, x_1 は少しも増加させることができない. このような辞書を退化した辞書と呼ぶ.

この場合は, 非基底変数 x_1 の増加量が 0 であるが, x_3 と x_1 を入れ替えて辞書を更新する.

$$\begin{aligned} \text{(D1)} \quad & z = -x_2 + x_3 \\ & x_1 = +x_2 - x_3 \\ & x_4 = 2 - \textcircled{2x_2} + x_3 \end{aligned}$$

すると, (D1) では, 増加させる非基底変数 x_2 が存在する. 丸の箇所をピボットとして辞書を更新すると

$$\begin{aligned} \text{(D2)} \quad & z = -1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ & x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ & x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

となり, 目的関数の変数の係数がすべて 0 以上であるので, 単体法は終了し, 最適値は -1 , 最適解は $(1, 1)$ となる.

辞書の巡回

さて、退化した辞書を上記のように更新して、退化していない辞書が得られれば良いが、辞書を更新しても退化した辞書が無限に続く場合がある。このような現象を巡回と呼ぶ。

例えば、ピボットの選択法として以下を考える：

- 解の更新ルール (i) で非基底変数を選ぶときに、目的関数における係数が一番小さいものを選ぶ。

すると、このピボット選択法に対して巡回が起こる線形計画問題の例が知られている。

巡回を避けるには、解と辞書を更新する際に以下のブランドのピボット選択法を用いれば良い：

- (1). 解の更新ルール (i) で非基底変数を選ぶときに、添字が最小のものを選ぶ
- (2). 選んだ非基底変数を増やすことで 0 になる基底変数が複数ある場合、それらの中で添字が最小のものを選ぶ。

ブランドのピボット選択法を用いると、どのような問題に対しても、巡回は起こらないことが知られている。

初期点が実行不可能

単体法では、まず辞書の非基底変数すべてに 0 を代入し、実行可能基底解を得る。しかし、それが実行可能でない場合がある。

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && -x_1 \\ & \text{制約} && x_1 - x_2 \leq -1 \\ & && x_1 + x_2 \leq 2 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

この問題の辞書は

$$(D1) \quad \begin{array}{l} z = \quad -x_1 \\ x_3 = -1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = \quad 2 - x_1 - x_2 \end{array}$$

となる。ここで、非基底変数 x_1, x_2 に 0 を代入すると、 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, -1, 2)$ となり、実行可能解を得られない。

この場合は、始めの実行可能解（辞書）を探す必要がある。これにも単体法を用いる。

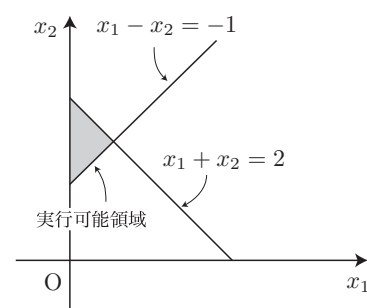


図 5.5: $(0, 0)$ を含まない実行可能領域

まず、元の問題の目的関数を無視し、制約式に新しい変数 x_5 を導入した以下の問題を考える：

$$\begin{aligned} \text{(A) 最小化 } & z = x_5 \\ \text{制約 } & x_5 = 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、目的関数は

$$x_5 = x_3 - (-1 - x_1 + x_2) \quad (5.3)$$

であり、(D1) の制約第 1 式の両辺の差になっている。この問題は元の問題と異なり、制約式の右辺にある変数をすべて 0 とおくことで実行可能解が得られる。そこでこの問題に単体法を適用する。この問題の辞書は

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad & z = 1 + x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_5 = 1 + x_1 - \textcircled{x_2} + x_3 \\ & x_4 = 2 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

となり、丸の箇所をピボットとして辞書を更新すると

$$\begin{aligned} \text{(A2)} \quad & z = \quad \quad \quad + x_5 \\ & x_2 = 1 + x_1 + x_3 - x_5 \\ & x_4 = 1 - 2x_1 - x_3 + x_5 \end{aligned}$$

となり、最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$ 、最適値 0 を得て、問題 (A) に対する単体法が終了する。

ここで、(A2) の制約は (A) の制約と等しく、 $x_5 = 0$ とおくと (A) の制約は (D1) の制約と等しい。よって (A1) の制約で $x_5 = 0$ とおき、(D1) の目的関数を用いて、辞書

$$\begin{aligned} \text{(D2)} \quad & z = \quad - x_1 \\ & x_2 = 1 + x_1 + x_3 \\ & x_4 = 1 - 2x_1 - x_3 \end{aligned}$$

を作成する。ただし必要であれば、目的関数を変形し非基底変数のみで表す。すると、(D2) は非基底変数に 0 を代入することで実行可能解を得られる辞書になっており、単体法を適用できる。

5.3 線形計画問題の一般形

2 変数の問題を用いて、線形計画問題の一般形を紹介する。

$$\begin{aligned} \text{最小化 } & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{制約 } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

は行列とベクトルを用いると

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

と書ける。ただし、ベクトルに関する不等号は

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \iff u_i \leq v_i \quad (i = 1, 2)$$

と定義する。よって

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \quad {}^t c x \\ & \text{制約} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad x \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.4}$$

と書ける。

5.3.1 線形計画問題の変形

行列とベクトルの置き方を工夫すると、すべての線形計画問題は (5.4) のように書くことができる。したがって、単体法はすべての線形計画問題に適用することができる。

[例] 5.2. (1). 最大化問題の場合：

$$\begin{aligned} & \text{最大化} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

この問題は

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

に等しい. これは問題 (5.4) と同じ形をしている.

(2). 制約が等式の場合:

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ & \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より, この問題は

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

と等しい. これは問題 (5.4) と同じ形をしている.

(3). 変数に制約がない場合：

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \text{制約なし} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} \quad (x'_1, \dots, x'_4 \geq 0)$$

と書けるので,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} \right) \\ &= c_1 x'_1 + c_2 x'_2 - c_1 x'_3 - c_2 x'_4 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

という変形などを行うことにより, この問題は

$$\begin{aligned} & \text{最小化} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} \\ & \text{制約} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ & \quad {}^t \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

と等しい. これは問題 (5.4) の形である.

5.4 双対問題

5.4.1 双対問題

線形計画問題には, 双対問題と呼ばれる裏に隠されたもう一つの問題がある. これについて, 栄養問題を例に解説する.

栄養問題

各栄養素には一日の最低摂取量が決められている。食品 1, 2 には主に 2 種類の栄養素が含まれており、それぞれ以下のように各栄養素の最低摂取量と食品の価格が決まっている;

	食品 1 (x_1)	食品 2 (x_2)	最低摂取量
価格	3	1	
栄養 A	4	3	7
栄養 B	5	2	8

表 5.1: 栄養問題

これらの情報を元に消費者とビタミン剤を作る製薬会社が以下のような問題を考えた。

消費者の視点

Q 1. 食費の最小化

必要な栄養を摂りながら食費を最小にするには、どのような割合で二つの食品を購入すれば良いか。

食品 1, 2 の量を x_1, x_2 とすると、問題は以下の最適化問題として定式化できる

$$\begin{aligned}
 (P_0) \text{ 最小化 } & 3x_1 + x_2 && \text{(食費)} \\
 \text{制約 } & 4x_1 + 3x_2 \geq 7 && \text{(栄養 A の摂取量)} \\
 & 5x_1 + 2x_2 \geq 8 && \text{(栄養 B の摂取量)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &&
 \end{aligned}$$

ビタミン剤を作る製薬会社の視点

一方、このような食品に対してある製薬会社が各栄養を含むビタミン剤の価格を決めようとしている。このとき、食品との競合に勝てるようなビタミン剤の価格を決めたい。

Q 2. ビタミン剤の売り上げ最大化

通常の食品より安く栄養を摂れるようにビタミン剤の価格を抑えながら、売り上げを最大にするには、ビタミン剤の価格をどのように設定すれば良いだろうか。

まず、表 5.1 より、食品 1 に含まれる栄養の量と食品 1 の価格との関係式を立てると、

$$(\text{栄養A}) \times (4 \text{ 単位}) + (\text{栄養B}) \times (5 \text{ 単位}) = \text{価格 3}$$

となる。同様に、食品 2 では、

$$(\text{栄養 A}) \times (3 \text{ 単位}) + (\text{栄養 B}) \times (2 \text{ 単位}) = \text{価格 1}$$

となる。

ここでビタミン剤 A とビタミン剤 B をそれぞれ栄養素 A と栄養素 B のビタミン剤とし、その単位当たりの価格をそれぞれ y_1, y_2 とする。

ビタミン剤で、栄養を食品より安く摂れるためには

$$4y_1 + 5y_2 \leq 3 \quad (\text{食品 1 の価格})$$

$$3y_1 + 2y_2 \leq 1 \quad (\text{食品 2 の価格})$$

となるようにビタミン剤の価格を設定すればよい。また、最低摂取量より、一日で、

$$\text{ビタミン剤 A は 7 単位, ビタミン剤 B は 8 単位}$$

が購入される。したがって、食品との競合に負けずに売り上げを最大にするように価格を設定するためには、以下の問題を解いて価格 y_1, y_2 を決定すれば良い；

$$\begin{aligned} (D_0) \text{ 最大化 } & 7y_1 + 8y_2 && (\text{売り上げ}) \\ \text{制約 } & 4y_1 + 5y_2 \leq 3 && (\text{価格を食品 1 以下に}) \\ & 3y_1 + 2y_2 \leq 1 && (\text{価格を食品 2 以下に}) \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

問題 (P₀) と問題 (D₀) の関係

このように、表 5.1 から問題 (P₀) と問題 (D₀) の二つの問題を考えることができる。これら問題の関係を、まず簡単な式変形より調べてみよう。

二つの問題の実行可能領域が空でないとする。 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ をそれぞれ (P₀), (D₀) の実行可能解とすると

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4y_1 + 5y_2 \leq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

を満たす。これより

$$\begin{aligned} ((P_0) \text{ の目的関数}) \quad 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= \\ &\geq (4y_1 + 5y_2)x_1 + (3y_1 + 2y_2)x_2 \\ &= (4x_1 + 3x_2)y_1 + (5x_1 + 2x_2)y_2 \\ &\geq 7y_1 + 8y_2 \quad ((D_0) \text{ の目的関数}) \end{aligned}$$

が成り立つ。次に、問題におけるこの不等式の意味を考えると、これは

$$\begin{aligned} \text{『消費者の食品購入費 } (3x_1 + x_2)\text{』} &\geq \\ &\text{『製薬会社のビタミン剤の売り上げ } (7y_1 + 8y_2)\text{』} \end{aligned}$$

という関係が成り立つことを意味する。また、それぞれ最適値を考えると、消費者一人あたりの

$$\begin{aligned} \text{『製薬会社のビタミン剤の売り上げの最大値』} &\text{は} \\ \text{『消費者の食品購入費の最小値』} &\text{を越えられない。} \end{aligned}$$

ということを表している。

このように二つの問題の関連性を調べると、経済現象の興味深い性質が見えてくることがある。

双対問題の定義

さて、食費最小化問題 (P₀) は、ベクトルと行列を使うと

$$\begin{aligned} (P_0) \quad \text{最小化} \quad & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \text{制約} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

と書ける。さらに具体的な数値を記号で置き換えると

$$\begin{aligned} (P) \quad \text{最小化} \quad & {}^t c x \\ \text{制約} \quad & A x \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

と表せる。ここで次の言葉を定義する。

[定義] 5.3. 問題 (P) に対して、係数を入れ替えた以下の問題 (D) を双対問題と呼ぶ：

$$\begin{array}{ll} (P) \quad \text{最小化} & {}^t c x \\ \text{制約} & A x \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D) \quad \text{最大化} & {}^t b y \\ \text{制約} & {}^t A y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

双対問題 (D) に対して、元の問題 (P) は **主問題** と呼ばれる。

さて、双対問題の記号に栄養問題の具体的な数値を代入すると、ビタミン剤の売り上げ最大化問題

$$(D_0) \quad \text{最大化} \quad [7 \quad 8] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{制約} \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

を得る。先程は問題の意味を考えて裏に隠された問題を得たが、このように機械的に求めることもできる。

5.4.2 双対定理

双対問題は、栄養問題だけでなく一般の線形計画問題において、重要な役割を持つ問題である。双対問題に関する次の定理を挙げる。

[定理] 5.4 (双対定理).

$$(P) \quad \text{最小化} \quad {}^t c x \quad (D) \quad \text{最大化} \quad {}^t b y$$

$$\text{制約} \quad A x \geq b \quad \text{制約} \quad {}^t A y \leq c$$

$$x \geq \mathbf{0} \quad y \geq \mathbf{0}$$

に対して、主問題 (P) と双対問題 (D) に実行可能解が少なくとも一つずつ存在すると仮定する。このとき、(P) と (D) にそれぞれ最適解 x^* , y^* が存在し、

$${}^t c x^* \text{ (P の最小値)} = {}^t b y^* \text{ (D の最大値)}$$

が成り立つ。

[解説] . ここでは、(P) と (D) の任意の実行可能解をそれぞれ x , y とすると、

$$\text{『弱双対定理』} \quad {}^t c x \text{ (P の目的関数値)} \geq {}^t b y \text{ (D の目的関数値)}$$

が成り立つことのみを示そう。最適値に対する等号の証明は 5.5 節で行う。

まず、ベクトル $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ が

$$p \leq q, \quad r \geq \mathbf{0}$$

を満たすとき、

$${}^t r p = r_1 p_1 + \cdots + r_n p_n \leq r_1 q_1 + \cdots + r_n q_n = {}^t r q$$

が成り立つことに注意する。いま、ベクトル x, y が

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{cases} {}^tAy \leq c \\ y \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

を満たすとする。このとき

$${}^tc \geq {}^t({}^tAy) = {}^tyA$$

より,

$$\begin{aligned} {}^tcx &\geq ({}^tyA)x = {}^y(Ax) \\ &\geq {}^y b = {}^tby \end{aligned}$$

栄養問題における双対定理の解釈

この定理を栄養問題に適用すると、ビタミン剤を作る製薬会社が、食品との競合に負けずに売り上げを最大にするように価格を設定すれば、それは

『製薬会社のビタミン剤の売り上げの最大値』＝

『消費者の食品購入費の最小値』

が成り立つような価格になる、ということがわかる。

様々な主問題と双対問題

定理 5.4 では,

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad &\text{最小化 } {}^tcx \\ &\text{制約 } Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

を主問題としたが、他の問題を主問題とすれば双対問題も変わってくるので、いくつか例を挙げておこう。5.3.1 節にあるような方法で、(P) に直してから、双対問題を作成すれば良い。

[例] 5.5. 以下の問題の組では、 (P_i) を主問題とすると、 (D_i) は双対問題になっている。

$$\begin{array}{ll} \text{(P}_1\text{)} \quad \text{最小化 } & {}^tcx \\ & \text{制約 } Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(D}_1\text{)} \quad \text{最大化 } & {}^tby \\ & \text{制約 } {}^tAy \leq c \\ & y \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(P}_2\text{)} \quad \text{最小化 } & {}^tcx \\ & \text{制約 } Ax \leq b \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(D}_2\text{)} \quad \text{最大化 } & {}^tby \\ & \text{制約 } {}^tAy = c \\ & y \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (P_3) \text{ 最小化} & {}^t cx \\
 \text{制約} & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 (D_3) \text{ 最大化} & {}^t by \\
 \text{制約} & {}^t Ay \leq c
 \end{array}$$

逆に, (D_i) を主問題とすると, (P_i) は双対問題になる. また, 任意の実行可能解において

$$(\text{最小化問題の目的関数値}) \geq (\text{最大化問題の目的関数値})$$

が成り立つ.

5.4.3 潜在価格

双対問題の解は主問題において重要な役割を持っている. これを例 5.1 で挙げた問題を用いて解説しよう.

[例] 5.6. 工場で製品 1, 製品 2 を作っている. 各製品の価格と必要な原材料 A, B の量は以下のようになる;

	製品 1	製品 2	在庫
原材料 A	1 kg	1 kg	4 kg
原材料 B	3 kg	1 kg	6 kg
価格	8 万円	6 万円	

— Q 1. —

材料の在庫を考慮しながら, 各製品をいくつずつ作れば利益が最大になるか?

製品 1 の個数を x_1 , 製品 2 の個数を x_2 とすると, 問題は以下のように定式化できる. この問題を (P) とおく;

$$\begin{array}{ll}
 (P) \text{ 最大化} & 8x_1 + 6x_2 \\
 \text{制約} & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

いま, (P) に単体法を適用すると解は $(x_1, x_2) = (1, 3)$, 最適値 26 となることがわかる. ここで, さらに以下のような問題を考える.

— Q 2. —

原材料 A か原材料 B のどちらかの在庫を 1kg だけ増やせるとしたら, どちらを増やした方が最大利益が増えるか?

原材料Aの在庫を1個増やすというのは、(P)の一つ目の制約式の右辺を1増やす；

$$\begin{aligned} (P_1) \text{ 最大化 } & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{制約 } & x_1 + x_2 \leq 4 + 1 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ということに対応する。よって、Q2は、一つ目の制約式の右辺を1増やした問題(P₁)の最適値と、二つ目の制約式の右辺を1増やした問題の最適値を求めて、二つの値を比較すれば答えを得られる。

双対問題の解の役割

しかし、Q2には、双対問題の解を利用する興味深い解法がある。問題(P)を主問題として、双対問題を作ると以下のようなになる；

$$\begin{aligned} (D) \text{ 最小化 } & 4y_1 + 6y_2 \\ \text{制約 } & y_1 + 3y_2 \geq 8 \\ & y_1 + y_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

いま、(D)の解も単体法で計算すると $(y_1, y_2) = (5, 1)$ となる。すると、双対問題(D)の解は次のような性質を持つ；

- (P)の一つ目の制約式の右辺を1増やすと、最適値は5(y_1 の値)増える
- (P)の二つ目の制約式の右辺を1増やすと、最適値は1(y_2 の値)増える

上記が成り立つ理由は少し後で説明する。

これより、原材料Aの在庫を1増やした方が最大利益の増加が大きいことがわかる。

潜在価格

ここで、双対問題の解 y_1 は原材料Aの隠された価値を表していると言えるだろう。実際には、原材料の価値は表5.1に隠されていると言える。このことより y_1 は原材料Aの潜在価格と呼ばれる。同様に y_2 は原材料Bの潜在価格である。

解の持つ性質の解説

上記の性質が成り立つ直感的な理由を説明する．まず，問題 (P₁) の双対問題 (D₁) は

$$\begin{aligned} (D_1) \text{ 最小化 } & (4 + 1)y_1 + 6y_2 \\ \text{制約 } & y_1 + 3y_2 \geq 8 \\ & y_1 + y_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

となる．

いま，問題 (P) と (D) には最適解が存在するので，それぞれ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , (\bar{y}_1, \bar{y}_2) とおく．すると，強双対定理 (定理 5.4) より

$$((P) \text{ の最適値}) \quad 8\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2 = 4\bar{y}_1 + 6\bar{y}_2 \quad ((D) \text{ の最適値})$$

が成り立つ．同様に，問題 (P₁) と (D₁) についても

$$((P_1) \text{ の最適値}) = ((D_1) \text{ の最適値})$$

が成り立つ．

ここで，問題 (D) と (D₁) に注目しよう．二つの問題を比べると，制約式が全く同じで，目的関数の係数が少し異なる．よって，第一に

双対問題 (D) と (D₁) の
実行可能領域は等しい

ことがわかる．一方，図 5.6 には (D) と (D₁) の目的関数の勾配ベクトルと (D₁) の目的関数の等高線が描かれている．図 5.6 より，目的関数の係数が

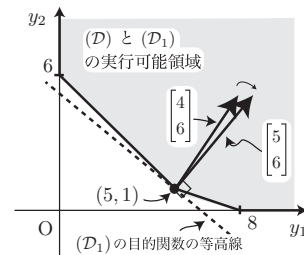


図 5.6: (D) と (D₁) の実行可能領域

$$(D) : \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow (D_1) : \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

と変化しても，目的関数の等高線と接する点は変化しない．よって第二に

双対問題 (D) と (D₁) の最適解は等しい

ということがわかる．したがって，

$$\begin{aligned} ((P_1) \text{ の最適値}) &= ((D_1) \text{ の最適値}) \\ &= (4 + 1)\bar{y}_1 + 6\bar{y}_2 = ((D) \text{ の最適値}) + 1 \cdot \bar{y}_1 \\ &= ((P) \text{ の最適値}) + \bar{y}_1 \end{aligned}$$

が成り立つ．

よって典型的な問題では，双対問題の最適解が異なる頂点に移動しない位小さく「主問題の制約式の右辺」 (= 「双対問題の目的関数の係数」) を変化させたとき，主問題の最適値が双対問題の解の値だけ変化することがわかる．

5.5 ファルカスの補題

5.5.1 ファルカスの補題

ファルカスの補題は連立線形不等式に関する基本定理である。これを用いて、双対定理 (定理 5.4) を証明することができる。

[補題] 5.7 (ファルカス). 任意の $m \times n$ 行列 A とベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ に対して, x と y に関する二つの連立不等式

$$(F1) \quad Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0}$$

$$(F2) \quad {}^tAy \geq \mathbf{0}, \quad {}^tby < 0$$

の内, どちらか一つにのみ解が存在する。

[解説] . この補題のポイントは以下である:

- どんな A, b に対しても, どちらかの連立不等式は解を持つ。
- どんな A, b に対しても, 両方の連立方程式が同時に解を持つことはない。

これより, 次が成り立つことも覚えておこう:

- (F1) が解を持たなければ (F2) が解を持つ。
- (F2) が解を持たなければ (F1) が解を持つ。

ここでは, 行列 A , ベクトル b を固定したとき, 両方の連立不等式が同時には解を持たないことのみを示す。いま,

$$(F1) \quad Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0}$$

を満たす x が存在すると仮定する。このとき,

$${}^tAy \geq \mathbf{0}$$

を満たす任意のベクトル y に対して,

$${}^tby = {}^t(Ax)y = {}^tx({}^tAy) \geq 0$$

となる。したがって, (F2) は成り立たず, 両方の連立不等式が同時に解を持つことはない。

(F1) の幾何的な意味

ファルカスの補題は幾何的な意味を考えると理解しやすい。まず (F1) について考えよう。ここでは A を 2×3 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

としよう。ここで a_1, a_2, a_3 は A の列ベクトルである。

まず, 連立不等式

$$(F1) \quad Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0}$$

が解を持つとする. いま

$$b = Ax = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

と書けるので, これは b, a_1, a_2, a_3 が図 5.7 の色の付いた範囲にあるということである.

ここで, 次の記号を定義しておく.

[定義] 5.8. ベクトル $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0)$$

と書けるベクトル a の集合を

$$\text{Cone}\{a_1, \dots, a_m\}$$

で表し, a_1, \dots, a_m が生成する凸錐と呼ぶ.

これより, (F1) が成り立つということは, b が $\text{Cone}\{a_1, a_2, a_3\}$ に含まれるということである.

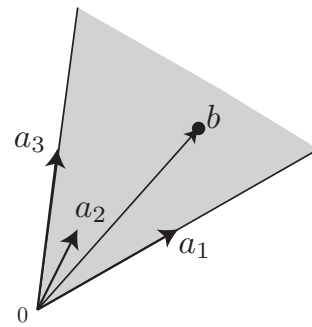


図 5.7: b は a_1, a_2, a_3 が生成する凸錐に入っている

(F2) の幾何的な意味

次に連立不等式

$$(F2) \quad {}^tAy \geq \mathbf{0}, \quad {}^tby < 0$$

が解を持つとする. まず u_1u_2 平面で原点を通る直線は, 一般に

$$0 = c_1u_1 + c_2u_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

と書けることに注意する. いま (F2) の解 $y = (y_1, y_2)$ を用いて, u_1u_2 平面上の直線

$$y_1u_1 + y_2u_2 = {}^tyu = 0$$

を考える.

ここで

$${}^t({}^tAy) = {}^tyA = \begin{bmatrix} {}^tya_1 & {}^tya_2 & {}^tya_3 \end{bmatrix}$$

なので,

$${}^tya_1 \geq 0, \quad {}^tya_2 \geq 0, \quad {}^tya_3 \geq 0$$

が成り立つ. 一方

$${}^tyb = {}^tby < 0$$

なので, b, a_1, a_2, a_3 は図 5.8 のような位置にある.

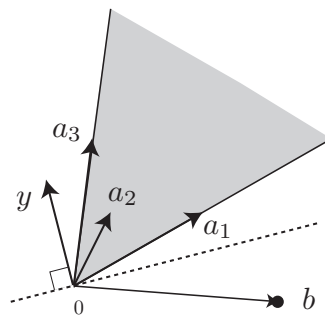


図 5.8: b と a_1, a_2, a_3 は直線で分離できる

ファルカスの補題の幾何的な意味

ファルカスの補題を幾何的に説明すると，行列 A に対して

$$\text{ベクトル } b \text{ が } \begin{cases} \text{Cone}\{a_1, \dots, a_m\} \text{ に入る} \implies (F1) \text{ が成り立つ} \\ \text{Cone}\{a_1, \dots, a_m\} \text{ に入らない} \implies (F2) \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

という意味を持つ。これより，一見すると証明は簡単そうであるが実は難しい。というのは図 5.9 のように凸錐が境界を含まないときは，ベクトル b が凸錐に入らないにも関わらず，(F2) が成り立たない。しかし，ベクトル a_1, \dots, a_m に対して， $\text{Cone}\{a_1, \dots, a_m\}$ が境界を含むことを示すのが意外に難しいのである。

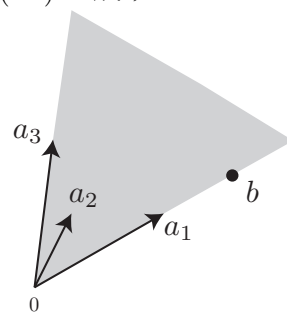


図 5.9: b が凸錐の境界にあるとき

[例] 5.9. xy 平面において， $y = \frac{1}{x}$ のグラフの第一象限の部分をも D とおく。 $\text{Cone } D$ を有限個の $a_1, \dots, a_m \in D$ に対して，

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0)$$

と書けるベクトルの集合とする。すると， $\text{Cone } D$ は $(0,0)$ を除いて境界を含まない集合である。

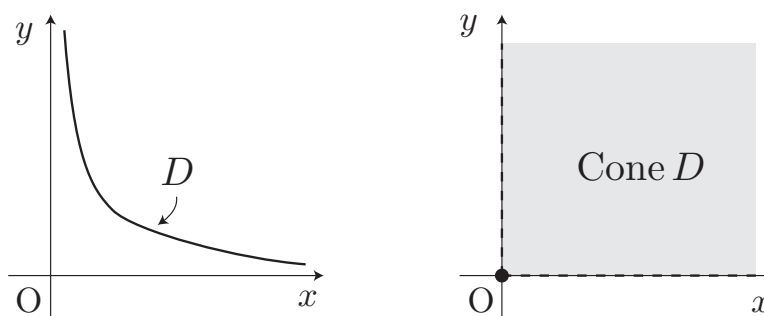


図 5.10: D と凸錐 $\text{Cone } D$

5.5.2 双対定理の証明

ファルカスの補題を証明する前に，ファルカスの補題を用いて双対定理を証明しよう。双対定理をもう一度書く。

[定理] (定理 5.4). A を $m \times n$ 行列, $x, c \in \mathbb{R}^n$, $y, b \in \mathbb{R}^m$ とする.

$$\begin{array}{ll} \text{(P) 最小化} & {}^t c x \\ \text{制約} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(D) 最大化} & {}^t b y \\ \text{制約} & {}^t A y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

に対して, 主問題 (P) と双対問題 (D) に実行可能解が少なくとも一つずつ存在すると仮定する. このとき, (P) と (D) にはそれぞれ最適解 x^* , y^* が存在し,

$${}^t c x^* \text{ (P の最小値)} = {}^t b y^* \text{ (D の最大値)}$$

が成り立つ.

証明. まず弱双対定理 (定理 5.4 の解説) より, それぞれの問題の任意の実行可能解 x, y に対して,

$${}^t c x \geq {}^t b y$$

が成り立つ. よって,

$${}^t c x \leq {}^t b y, \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} {}^t A y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

を満たす x, y が存在することを示せば良い. このとき, (5.5) を満たす x, y がそれぞれ (P), (D) の解である.

いま, 式 (5.5) は x, y, z, w の連立不等式

$$\begin{bmatrix} -A & 0 & E_m & 0 & 0 \\ 0 & {}^t A & 0 & E_n & 0 \\ {}^t c & -{}^t b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ s \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (5.6)$$

が解を持つことと同値である. 実際に x, y, z が (5.5) を満たすとする. このとき,

$$z = Ax - b, \quad w = c - {}^t A y, \quad s = {}^t b y - {}^t c x$$

とおくと,

$$\begin{cases} -Ax & + z & = -b, & z \geq \mathbf{0} \\ & {}^t A y & + w & = c, & w \geq \mathbf{0} \\ & {}^t c x - {}^t b y & + s & = 0, & s \geq 0 \end{cases}$$

となる. これは式 (5.6) に等しい. 逆に x, y, z, w, s が (5.6) を満たすとする. このとき, $z \geq \mathbf{0}, w \geq \mathbf{0}, s \geq 0$ より z, w, s を削除すれば (5.5) 成り立つ.

ここで、ファルカスの補題より、式 (5.6) は p, q, r の連立不等式

$$\begin{bmatrix} -{}^tA & 0 & c \\ 0 & A & -b \\ E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -{}^tb & {}^tc & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} < 0 \quad (5.7)$$

が解を持たないことと同値である。以下でこれを示す。

いま p, q, r が

$$\begin{bmatrix} -{}^tA & 0 & c \\ 0 & A & -b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

を満たすとする。すると

$$Aq \geq rb, \quad {}^tAp \leq rc, \quad p \geq \mathbf{0}, \quad q \geq \mathbf{0}, \quad r \geq 0 \quad (5.8)$$

が成り立つ。ここで、 r は数であることに注意する。

$r > 0$ のとき、

$$x_0 = \frac{1}{r}q, \quad y_0 = \frac{1}{r}r$$

とおくと、式 (5.8) より

$$Ax_0 = \frac{1}{r}Aq \geq b, \quad Ay_0 = \frac{1}{r}Ap \leq c, \quad x_0 \geq \mathbf{0}, \quad y_0 \geq \mathbf{0}$$

となるので、 x_0, y_0 はそれぞれ (P), (D) の実行可能解である。よって弱双対定理より

$$\begin{bmatrix} -{}^tb & {}^tc & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = r(-{}^tb y_0 + {}^tc x_0) \geq 0$$

が成り立つ。したがって (5.7) は解を持たない。

一方 $r = 0$ のとき、式 (5.8) より

$$Aq \geq \mathbf{0}, \quad {}^tAp \leq 0$$

となる。これより (P), (D) の実行可能解をそれぞれ x, y とすると、

$$\begin{bmatrix} -{}^tb & {}^tc & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = -{}^tb p + {}^tc q \geq -{}^t x {}^t A p + {}^t y A q \geq 0$$

が成り立つ。よって (2) は解を持たない。

したがって、(5.5) を満たす x, y が存在することが示された。

□

5.5.3 フーリエ・モツキンの消去法

ファルカスの補題の証明には様々な方法があるが、本書では連立線形不等式の変数消去を行うアルゴリズムを用いた構成的な方法を用いる。まず具体例で説明する。

[例] 5.10 (フーリエ・モツキンの消去法). 連立不等式

$$(FM_3) \quad \begin{cases} 2x + 2y - 3z \leq 2 \\ 2x - 3y + 2z \leq 2 \\ 2x + 2y + 2z \leq 3 \\ -x - y - z \leq a \\ -3x + 2y + 2z \leq 2 \end{cases}$$

が解を持つような a の条件を求めよ。

始めに連立不等式の x を消去する。まず x の係数が 1 となるように変形し、連立不等式を分割する：

$$\begin{cases} -y - z - a \leq x \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \leq x \end{cases}, \quad \begin{cases} x \leq -y + \frac{3}{2}y + 1 \\ x \leq \frac{3}{2}y - z + 1 \\ x \leq -y - z + \frac{3}{2} \end{cases}$$

これより、連立不等式 (FM_3) は

$$\begin{aligned} \max \left\{ -y - z - a, \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \right\} \\ \leq x \leq \min \left\{ -y + \frac{3}{2}y + 1, \frac{3}{2}y - z + 1, -y - z + \frac{3}{2} \right\} \quad (5.9) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、ある x に対して x, y, z が式 (5.9) を満たすことと、 y, z が

$$\begin{aligned} \max \left\{ -y - z - a, \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \right\} \\ \leq \min \left\{ -y + \frac{3}{2}y + 1, \frac{3}{2}y - z + 1, -y - z + \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

を満たすことは同値である。この式は

$$\begin{cases} -y - z - a \leq -y + \frac{3}{2}z + 1 \\ -y - z - a \leq \frac{3}{2}y - z + 1 \\ -y - z - a \leq -y - z + \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \leq -y + \frac{3}{2}z + 1 \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \leq \frac{3}{2}y - z + 1 \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \leq -y - z + \frac{3}{2} \end{cases}$$

と書けるので，式を整理して

$$(\text{FM}_2) \quad \begin{cases} -z \leq \frac{2}{5}(1+a) \\ -y \leq \frac{2}{5}(1+a) \\ 0 \leq \frac{3}{2} + a \\ 2y - z \leq 2 \\ -y + 2z \leq 2 \\ 10y + 10z \leq 13 \end{cases}$$

を得る．よって， y, z が式 (FM_2) を満たすことと，ある x に対して x, y, z が式 (FM_3) を満たすことは同値である．

次にこの連立不等式の y に注目して

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}(1+a) \leq y \\ 2z - 2 \leq y \end{cases}, \quad \begin{cases} y \leq \frac{1}{2}z + 1 \\ y \leq -z + \frac{13}{10} \end{cases}, \quad \begin{cases} -z \leq \frac{2}{5}(1+a) \\ 0 \leq \frac{3}{2} + a \end{cases}$$

と分割し， y を消去すると

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}(1+a) \leq \frac{1}{2}z + 1 \\ -\frac{2}{5}(1+a) \leq -z + \frac{13}{10} \\ 2z - 2 \leq \frac{1}{2}z + 1 \\ 2z - 2 \leq -z + \frac{13}{10} \\ -z \leq \frac{2}{5}(1+a) \\ 0 \leq \frac{3}{2} + a \end{cases}$$

となる．これを整理すると

$$(\text{FM}_1) \quad \begin{cases} -z \leq \frac{14}{5} + \frac{4}{5}a \\ z \leq \frac{17}{10} + \frac{2}{5}a \\ z \leq 2 \\ z \leq \frac{11}{10} \\ -z \leq \frac{2}{5}(1+a) \\ 0 \leq \frac{3}{2} + a \end{cases}$$

となる．ここで， z が (FM_1) を満たすことと，ある y に対して， y, z が (FM_2) を満たすことは同値である．

最後に z を消去する．連立不等式を分割すると

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}(7+2a) \leq z \\ -\frac{2}{5}(1+a) \leq z \end{cases}, \quad \begin{cases} z \leq \frac{17}{10} + \frac{2}{5}a \\ z \leq 2 \\ z \leq \frac{11}{10} \end{cases}, \quad 0 \leq \frac{3}{2} + a \quad (5.10)$$

となる. ここでは, 新しい連立不等式を作る前に式を整理する. (5.10) の右の式より, $a \geq -\frac{3}{2}$ を得る. よって

$$-\frac{2}{5}(1+a) - \left\{ -\frac{2}{5}(7+2a) \right\} = \frac{2}{5}(6+a) > 0,$$

$$\frac{17}{10} + \frac{2}{5}a > \frac{17}{10} - \frac{3}{5} = \frac{11}{10}$$

となるので, (5.10) は

$$-\frac{2}{5}(1+a) \leq z, \quad z \leq \frac{11}{10}, \quad 0 \leq \frac{3}{2} + a$$

と書ける. これより z を削除すると

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}(1+a) \leq \frac{11}{10} \\ 0 \leq \frac{3}{2} + a \end{cases}$$

を得る. 整理すると

$$(\mathbf{FM}_0) \quad \begin{cases} 0 \leq \frac{2}{5}a + \frac{3}{2} \\ 0 \leq a + \frac{3}{2} \end{cases}$$

となり,

$$-\frac{3}{2} \leq a \tag{5.11}$$

を得る. よって a がこの不等式を満たすことと, ある z に対して, z が (5.10) を満たすことは同値である.

したがって, a が (5.11) を満たすとき, (FM3) は解を持つ.

凸多面体に対する射影定理

次の定理はフーリエ・モツキンの消去法を持つ性質を定理の形で書いたものであり, それ自身興味深いものである.

[定理] 5.11. A を $m \times n$ 行列, $b \in \mathbb{R}^n$ とする. n 変数 x に関する連立不等式

$$(\mathbf{FM}_n) \quad Ax \leq b$$

に対して, ある行列 P が存在して, 以下を満たす:

- (1). P の成分はすべて 0 以上である.
- (2). PA の第 1 列は零ベクトルであり,

$$PA = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A' \end{bmatrix}, \quad Pb = b'$$

に対して, $(n-1)$ 変数 x' に関する連立不等式を

$$(FM_{n-1}) \quad A'x' \leq b'$$

するとき,

$$(FM_n) \text{ が解を持つ} \iff (FM_{n-1}) \text{ が解を持つ}$$

が成り立つ.

証明.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

とおくと

$$(FM_n) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

と書ける. この連立不等式より x_1 を消去する.

始めに, 行列 A が

$$\begin{aligned} a_{i1} &> 0 & (i = 1, \dots, s) \\ a_{i1} &< 0 & (i = s+1, \dots, t) \\ a_{i1} &= 0 & (i = t+1, \dots, m) \end{aligned} \tag{5.12}$$

を満たす場合を考える.

$$I_+ = \{1, \dots, s\}, \quad I_- = \{s+1, \dots, t\}, \quad I_0 = \{t+1, \dots, m\}$$

とおく.

まず I_+ , I_- が空集合でないと仮定する. (FM_n) を

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{a_{i1}} \sum_{j=2}^n a_{ij}x_j &\leq \frac{1}{a_{i1}}b_i & (i \in I_+) \\ -x_1 - \frac{1}{a_{k1}} \sum_{j=2}^n a_{kj}x_j &\leq -\frac{1}{a_{k1}}b_k & (k \in I_-) \\ \sum_{j=2}^n a_{ij}x_j &\leq b_i & (i \in I_0) \end{aligned} \tag{5.13}$$

と変形する. ここで, 式 (5.13) の I_+ , I_- に関する式は,

$$\max_{k \in I_-} \left\{ -\frac{1}{a_{k1}} \sum_{j=2}^n a_{kj}x_j + \frac{1}{a_{k1}}b_k \right\} \leq x_1 \leq \min_{i \in I_+} \left\{ -\frac{1}{a_{i1}} \sum_{j=2}^n a_{ij}x_j + \frac{1}{a_{i1}}b_i \right\}$$

と書けるので，式 (5.13) を満たす x_1 が存在するためには， x_2, \dots, x_n が

$$-\frac{1}{a_{k1}} \sum_{j=2}^n a_{kj} x_j + \frac{1}{a_{k1}} b_k \leq -\frac{1}{a_{i1}} \sum_{j=2}^n a_{ij} x_j + \frac{1}{a_{i1}} b_i \quad (k \in I_-, i \in I_+)$$

$$\sum_{j=2}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I_0)$$

を満たせば良い．ここで x_2, \dots, x_n を左辺，定数項を右辺に移項すると

$$\sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{a_{i1}} a_{ij} - \frac{1}{a_{k1}} a_{kj} \right) x_j \leq \frac{1}{a_{i1}} b_i - \frac{1}{a_{k1}} b_k \quad (i \in I_+, k \in I_-)$$

$$\sum_{j=2}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I_0)$$
(5.14)

を得る．このとき，式 (5.14) は $(n-1)$ 変数の連立不等式であり，(5.14) の解の存在と (FM1) の解の存在が同値である．

次に $|I_+|$ を集合 I_+ の要素数し，

$$\ell = |I_+| \cdot |I_-| + |I_0|$$
(5.15)

に対して， $\ell \times n$ 行列を

$$P_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \frac{1}{a_{11}} & & & -\frac{1}{a_{(s+1)1}} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \frac{1}{a_{11}} & & & & & & -\frac{1}{a_{t1}} \\ \hline & \frac{1}{a_{21}} & & -\frac{1}{a_{(s+1)1}} & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \\ & \frac{1}{a_{21}} & & & & & -\frac{1}{a_{t1}} \\ \hline & & \ddots & & & \vdots & \\ \hline & & & \frac{1}{a_{s1}} & & -\frac{1}{a_{(s+1)1}} & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{s1}} & & & -\frac{1}{a_{t1}} \\ \hline & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

とおく．ただし数字が書いていない成分は 0 とする．

ここで， P_1 の成分はすべて 0 以上である．また，(5.13) で $i \in I_+$ と $k \in I_-$ に関する式の両辺を足すと，式 (5.14) が得られることに注意すると， $P_1 A$ の第 1 列が零ベクトルになることがわかる．そこで

$$P_1 A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A' \end{bmatrix}, \quad P_1 b = b'$$

とおく. 再度, 式 (5.13) より

$$A'x' \leq b' \quad (5.16)$$

は式 (5.14) と等しい. よって, (5.16) の解の存在と (FM1) の解の存在は同値であり, 求める行列は $P = P_1$ である.

I_- が空集合の場合は, 式 (5.13) より, (FM1) を満たす x_1 の範囲に下からの制限がないことを意味するので, 単に x_1 の項を消去した

$$\sum_{j=2}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i \in I_+ \cup I_0)$$

の解の存在と (FM1) の解の存在が同値になる. 行列は

$$P = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば良い. I_+ が空集合の場合も同様である.

最後に一般の行列 A について考える. (5.12) を満たすように A の行を入れ替える $m \times m$ 行列を P_0 とすると, P_0 の成分はすべて 0 以上である. よって,

$$P = P_1 P_0$$

とおき,

$$PA = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A' \end{bmatrix}, \quad b' = Pb$$

とすれば良い.

□

不等式の増加数

ガウスの消去法では, 連立 1 次方程式の変数を削除する際, 方程式の数は増えなかった. フーリエ・モツキンの消去法は, 連立不等式を扱える代わりに不等式の数を増加させる.

定理 5.11 では, 元の連立不等式の不等式数は m , 新しい連立不等式の不等式数は行列 P の行数であった. ここでは, 行列 P の行数 ℓ が

$$\ell \leq \max \left\{ \frac{m^2}{4}, m \right\}$$

を満たすことを示そう.

いま, 式 (5.15) で定義したように

$$\ell = |I_+| \cdot |I_-| + |I_0|$$

であり, $|I_+| + |I_-| + |I_0| = m$ なので,

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & m_1 m_2 + m_3 \\ \text{制約} \quad & m_1 + m_2 + m_3 = m \\ & m_1, m_2, m_3 : 0 \text{ 以上の } \underline{\text{整数}} \end{aligned}$$

の最大値を評価すれば良い. この問題では変数が整数なので, 相加相乗平均を用いる. いま

$$\begin{aligned} m_1 m_2 + m_3 &\leq \frac{(m_1 + m_2)^2}{4} + m_3 \\ &= \frac{1}{4}(m - m_3)^2 + m_3 \\ &= \frac{1}{4}(m_3^2 - 2(m - 2)m_3 + m^2) \\ &= \frac{1}{4}\{(m_3 - m + 2)^2 + 4m - 4\} \end{aligned}$$

なので,

$$f(m_3) = \frac{1}{4}\{(m_3 - m + 2)^2 + 4m - 4\}$$

とおく.

さらに $f(m_3)$ を $0 \leq m_3 \leq m$ で最大化すると, 2 次関数の性質より $m = 1, 2, 3, 4$ のとき $f(m_3)$ は $m_3 = m$ で最大値をとる. よって,

$$m_1 m_2 + m_3 \leq m$$

となる. $m \geq 5$ のとき $f(m_3)$ は $m_3 = 0$ で最大値をとる. よって

$$m_1 m_2 + m_3 \leq \frac{m^2}{4}$$

となる. これらを合わせると

$$\ell \leq \max \left\{ \frac{m^2}{4}, m \right\}$$

を得る.

5.5.4 ファルカスの補題の証明

ファルカスの補題の変形

定理 5.11 を用いて, まずファルカスの補題の変形の一つである以下の補題を証明する.

[補題] 5.12. 任意の $m \times n$ 行列 A とベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ に対して, x と y に関する二つの連立不等式

$$(G1) \quad Ax \leq b$$

$$(G2) \quad y \geq 0, \quad {}^tAy = 0, \quad {}^tby < 0$$

の内, どちらか一つにのみ解が存在する.

証明. まず (G1) が解 x_0 を持つとする. このとき,

$$y \geq 0, \quad {}^tAy = 0$$

を満たす任意の y に対して,

$${}^tby \geq {}^tyAx_0 = {}^t({}^tAy)x_0 = 0$$

となる. よって, (G2) を満たす y は存在しない.

次に (G1) が解を持たないとき, (G2) が解を持つことを示す. いま, $A^{(n)} = A, b^{(n)} = b$ とおいて

$$(G1)_n \quad A^{(n)}x \leq b^{(n)}$$

が解を持たないとする.

このとき, 定理 5.11 を繰り返し適用すると, 成分がすべて 0 以上である行列 $P^{(n)}, P^{(n-1)}, \dots, P^{(1)}$ が存在して,

$$P^{(k)}A^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A^{(k-1)} \end{bmatrix}, \quad P^{(k)}b^{(k)} = b^{(k-1)} \quad (k = n, n-1, \dots, 1)$$

とおくと,

$$(G1)_k \quad A^{(k)}x \leq b^{(k)} \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0)$$

が解を持つことと, $(G1)_n$ が解を持つことは同値である. ただし, ベクトル x は連立不等式に応じて適切な要素数を持つとする. また, $A^{(k)}$ の列数は k であることに注意する.

ここで $k=0$ のとき, $A^{(0)}$ は零行列であり,

$$(G1)_0 \quad \mathbf{0} \leq b^{(0)}$$

となる. いま $(G1)_n$ は解を持たないので, 不等式 $(G1)_0$ は不成立でなければならない. よって, ベクトル $b^{(0)}$ のある成分 $b_i^{(0)}$ で

$$b_i^{(0)} < 0$$

となるものが存在する. ここで,

$$y^{(0)} = e_i$$

とおく. ただし, e_i は第 i 成分が 1 でそれ以外が 0 であるようなベクトルである. すると $A^{(0)}$ は零行列であるので, $y^{(0)}$ は

$$(G2)_0 \quad y^{(0)} \geq \mathbf{0}, \quad {}^t A^{(0)} y^{(0)} = \mathbf{0}, \quad {}^t b^{(0)} y^{(0)} < 0$$

を満たす.

ここで,

$$y^{(k)} = {}^t P^{(k)} y^{(k-1)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

とおくと, $y^{(n)}$ が

$$(G2)_n \quad y^{(n)} \geq \mathbf{0}, \quad {}^t A^{(n)} y^{(n)} = \mathbf{0}, \quad {}^t b^{(n)} y^{(n)} < 0$$

を満たすことを帰納法で示す. このとき $A^{(n)} = A, b^{(n)} = b$ なので, (G2) が解を持つことが示される.

- $n = 0$ のとき, $(G2)_0$ が成り立つことはすでに示した.
- $n = k - 1$ のとき

$$(G2)_{k-1} \quad y^{(k-1)} \geq \mathbf{0}, \quad {}^t A^{(k-1)} y^{(k-1)} = \mathbf{0}, \quad {}^t b^{(k-1)} y^{(k-1)} < 0$$

が成り立つとする. このとき

$$\begin{aligned} {}^t A^{(k)} y^{(k)} &= {}^t A^{(k)} ({}^t P^{(k)} y^{(k-1)}) = {}^t (P^{(k)} A^{(k)}) y^{(k-1)} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^t A^{(k-1)} \end{bmatrix} y^{(k-1)} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t b^{(k)} y^{(k)} &= {}^t b^{(k)} ({}^t P^{(k)} y^{(k-1)}) = {}^t (P^{(k)} b^{(k)}) y^{(k-1)} \\ &= {}^t b^{(k-1)} y^{(k-1)} < 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. また, $P^{(k)}$ と $y^{(k-1)}$ の成分はすべて 0 以上なので, $y^{(k)}$ は

$$(G2)_k \quad y^{(k)} \geq \mathbf{0}, \quad {}^t A^{(k)} y^{(k)} = \mathbf{0}, \quad {}^t b^{(k)} y^{(k)} < 0$$

を満たす.

したがって, 帰納法により $y^{(n)}$ は $(G2)_n$ を満たす. □

ファルカスの補題の証明

ファルカスの補題をもう一度書き, 証明を与える.

【補題】 (補題 5.7). 任意の $m \times n$ 行列 A とベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ に対して, x と y に関する二つの連立不等式

$$(F1) \quad Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0}$$

$$(F2) \quad {}^tAy \geq \mathbf{0}, \quad {}^tby < 0$$

の内, どちらか一つにのみ解が存在する.

証明. 補題 5.7 の解説より, (F1) が解を持つとき, (F2) は解を持たない. よって, (F1) が解を持たないと仮定し, (F2) が解を持つことを示す.

このとき

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \\ -E \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

は解を持たない. よって定理 5.12 より, z に関する連立不等式

$$z \geq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} {}^tA & -{}^tA & -E \end{bmatrix} z = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} {}^tb & -{}^tb & \mathbf{0} \end{bmatrix} z < 0$$

は解を持つ. ここで解を $z = (z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)})$ と分割して

$${}^tAz^{(1)} - {}^tAz^{(2)} - z^{(3)} = \mathbf{0}$$

$${}^tbz^{(1)} - {}^tbz^{(2)} < 0$$

とできる. $y = z^{(1)} - z^{(2)}$ とおくと,

$${}^tAy = z^{(3)} \geq \mathbf{0}$$

$${}^tby < 0$$

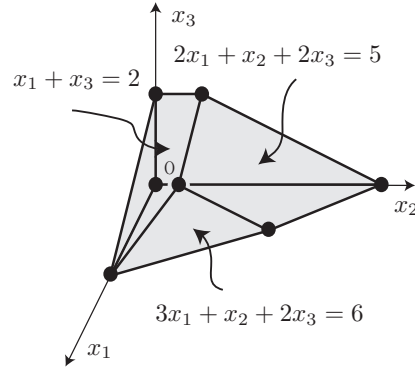
が成り立つ. よって (F2) は解を持つ.

□

まとめ

線形計画問題

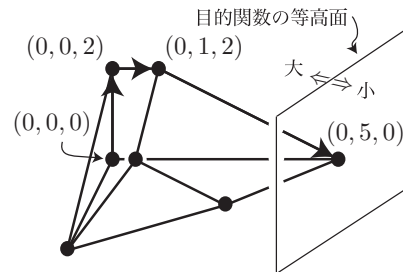
(P) 最小化 $-x_1 - 2x_2 - 3x_3$
 制約 $x_1 + x_3 \leq 2$
 $2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$



最適解は頂点にある！

単体法

目的関数値が下がる方へ頂点を求めていく



双対問題

主問題

(P) 最小化 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
 制約 $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$
 $x_1, x_2 \geq 0$

食費最小化

双対問題

(D) 最大化 $\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$
 制約 $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $y_1, y_2 \geq 0$

ビタミン剤売り上げ最大化

転置行列

潜在価格

右辺を少し動かしたときの最適値の変化率



「潜在価格」 = 「双対問題の最適解の値」